

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук «ИТФ им.
Л.Д. Ландау РАН»

На правах рукописи

Вергелес Сергей Сергеевич

**Генерация когерентных течений регулярными и хаотическими
источниками**

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка — 2025

Оглавление

	Стр.
Введение	6
Глава 1. Возбуждение вихревых течений поверхностными волнами в присутствии плёнки	25
1.1 Введение	25
1.2 Уравнения течения жидкости и граничные условия на свободной поверхности	30
1.3 Описание волнового движения в линейном приближении	34
1.3.1 Поле скорости	37
1.3.2 Закон дисперсии и добротность волны	38
1.3.3 Зависимость характеристик волны от модуля упругости плёнки	39
1.3.4 Предел несжимаемой плёнки	42
1.4 Разделение полного течения на волновое движение и массовый транспорт	42
1.4.1 Дрейф Стокса	43
1.4.2 Массовый транспорт	47
1.4.3 Выводы	50
1.5 Влияние плёнки на массовый транспорт	51
1.5.1 Возбуждение вихревого течения в случае несжимаемой плёнки	51
1.5.2 Плёнка с конечной сжимаемостью	54
1.5.3 Выводы	57
1.6 Генерация вихревого течения двумя волнами, распространяющимися под прямым углом друг к другу	58
1.6.1 Процесс установления вихревого течения	59
1.6.2 Процесс затухания вихревого течения	62
1.6.3 Сравнение с экспериментальными результатами	62
1.7 Генерация крупномасштабного вихревого течения двумя волнами, распространяющимися под малым углом друг к другу	64
1.7.1 Течения, индуцированные стоячими волнами	67
1.7.2 Конечная глубина жидкости	68

	Стр.
1.7.3 Выводы	70
1.8 Заключение	70
1.8.1 Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными	73
1.8.2 Условия применимости полученных результатов	76
 Глава 2. Распространение инерционных волн на фоне геострофического течения	
2.1 Введение	78
2.2 Уравнение на среднее течение в вихре	86
2.2.1 Разделение на геострофическое крупномасштабное течение и мелкомасштабные турбулентные пульсации	86
2.2.2 Баланс момента импульса	87
2.2.3 Баланс энергии	90
2.3 Динамика турбулентных пульсаций	92
2.3.1 Инерционные волны	94
2.3.2 Базис Салхи-Камбо	97
2.4 Статистика турбулентных пульсаций	98
2.4.1 Общие свойства корреляционной функции скорости второго порядка	98
2.4.2 Связь статистики скорости со статистикой возбуждающей течение силы	100
2.4.3 Исследование общих свойств квадратичных средних	101
2.5 Статистически изотропная сила и предел малого числа Россби	105
2.5.1 Тангенциальное напряжение Рейнольдса.	106
2.5.2 Средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций	110
2.6 Распространение волновых пакетов в слабо-неоднородном геострофическом течении	111
2.7 Заключение	117
 Глава 3. Радиальные профили когерентных геострофических вихрей	
3.1 Введение	121
3.2 Радиальный профиль вихря в пределе малого числа Россби	125
3.3 Влияние конечности числа Россби на профиль когерентных вихрей	128

3.3.1	Передача энергии когерентному течению	128
3.3.2	Профиль скорости	130
3.3.3	Циклоны	132
3.3.4	Антициклоны	134
3.3.5	Выводы	138
3.4	Учёт влияния горизонтальных границ течения	139
3.4.1	Слой Экмана	139
3.4.2	Трение о дно	142
3.4.3	Когерентный вихрь	144
3.4.4	Баланс энергии	147
3.4.5	Сравнение с экспериментальными данными	148
3.4.6	Анизотропная статистика инерционных волн	149
3.4.7	Выводы	151
3.5	Динамика малых радиальных возмущений конденсата	153
3.5.1	Линейный отклик конденсата на возмущения	155
3.5.2	Корреляция между напряжением Рейнольдса и зональным течением	162
3.5.3	Динамика амплитуды волны	165
3.5.4	Возбуждение волн конденсата	168
3.5.5	Выводы	169
3.6	Заключение	170
Глава 4.	Перемешивание пассивного скаляра на малых масштабах . .	173
4.1	Введение	173
4.2	Общие соотношения	183
4.2.1	Статистика лагранжевых траекторий	184
4.2.2	Корреляционные функции	188
4.2.3	Динамика параметров кляксы	191
4.3	Парная корреляционная функция	196
4.3.1	Определение оптимальной флуктуации градиента скорости	198
4.4	Корреляционная функция четвёртого порядка в статистически изотропном течении	203
4.4.1	Трёх-мерный поток	206
4.4.2	Двумерный поток	209

	Стр.
4.5 Течение с сильной сдвиговой компонентой	220
4.5.1 Лагранжевы траектории	221
4.5.2 Перемешивание скаляра	225
4.5.3 Одноточечные моменты в задаче распада	228
4.5.4 Постоянная накачка скаляра	231
4.6 Заключение	232
Заключение	236
Публикации автора по теме диссертации	243
Список литературы	245
Список рисунков	265
Приложение А. Формирование и затухание крупномасштабных вихрей	271
А.1 Формирование завихренности	271
А.2 Затухание завихренности	272
Приложение Б. Модель коротко-коррелированного по времени поля скорости	274
Б.1 Статистические свойства поля скорости	274
Б.2 Свойства разложения Ивасава матрицы W	276
Б.3 Течение с сильной сдвиговой компонентой	278
Приложение В. Уравнения на корреляционные функции скаляра	282
В.1 Корреляционная функция четвёртого порядка	283
В.2 Уравнение на корреляционную функцию четвёртого порядка в двумерном случае	285
В.2.1 Уравнение в переменных сингулярного разложения	285
В.2.2 Уравнение в переменных Ивасава	286

Введение

Актуальность темы исследования. Нелинейное взаимодействие среднего течения с изменяющимся со временем вкладом является классическим феноменом в гидродинамике. Аналитическое исследование такого рода задач часто затруднено вследствие отсутствия малого параметра в задаче. Например, для турбулентного течения жидкости по трубе аналитические результаты, полученные непосредственно на основании уравнения Навье-Стокса без дополнительных модельных упрощающих предположений, исчерпываются логарифмическим профилем среднего течения вблизи боковой границы [1—3]. Однако, в определённых случаях малый параметр имеется в виде разделения времён: среднее течение оказывается медленно изменяющимся по сравнению с характерной скоростью изменения переменной во времени части течения, а влияние нелинейности на динамику переменной части течения оказывается несущественным по тем или иным причинам. В этом случае возможно сначала отдельно найти быструю динамику переменной части течения на фоне среднего, описываемую линейаризованным по амплитуде переменного течения уравнением Навье-Стокса. В результате в усреднённом по времени уравнении Навье-Стокса оказывается известным вклад в среднее значение нелинейного члена, квадратичного по амплитуде переменной части течения, и, таким образом, это уравнение оказывается замкнутым.

Один из возможных типов реализации такого разделения времён достигается в системах, поддерживающих распространение волн. Частота волн в таких системах велика по сравнению с характерной скоростью изменения вихревого не-волнового движения, имеющего масштаб, сравнимый или больше длины волны. Примером такой системы являются акустические течения. Эти течения возникают в результате вязкого трения звуковой волны о границы течения [4—6]. Тогда как в объёме движение жидкости, связанное со звуковыми волнами, является чисто потенциальным, в вязком подслое вблизи границы возникает вихревая часть течения. Нелинейное взаимодействие этой части с самой собой и с потенциальной частью течения приводит к возникновению эффективного граничного условия для тангенциальной компоненты течения V_τ на около-нулевой частоте: скорость этого течения должна быть пропорциональна квадрату амплитуды u_0 колебаний скорости в волне сразу вне вязкого подслоя, $V_\tau \sim u_0^2/s$ (s — скорость звука). Аналогичное граничное условие возникает на дне водоёма конечной

глубины, по которому распространяются поверхностные волны [7]. Вблизи свободной поверхности жидкости также есть вязкий подслой [8]. Однако тот факт, что к свободной поверхности не приложено никаких внешних сил, приводит к другому эффективному условию для медленного течения — фиксированному значению касательного напряжения τ , называемому виртуальным волновым касательным напряжением. Происхождение этого напряжения обуславливается законом сохранения импульса [9]. Импульс волны, содержащийся во гребнево-впадинном слое, высвобождается за счёт вязкого затухания волны и передаётся медленному течению. Взаимодействие волн с вихревым медленным течением не ограничивается описанным механизмом. Если амплитуда течения достаточно велика, то следует учитывать производимое им искажение волнового движения, в результате чего появляется объёмная сила, называемая вихревой силой, действующая со стороны волны на медленное течение [10; 11]. Сама же волна при этом испытывает рассеяние на медленном течении [12].

Если свободная поверхность жидкости покрыта плёнкой, то скорость затухания волны может значительно увеличиться [13]. Движение чистой поверхности, увлекаемой поверхностной волной, является сжимаемым. Увеличение затухания происходит в том случае, если плёнка настолько упруга, что она в существенной мере препятствует сжатию и растяжению свободной поверхности [14; 15]. Плёнка на поверхности воды образуется спонтанно вследствие большой диэлектрической проницаемости воды и играет существенную роль в затухании коротких волн на поверхности океана [16]. Как правило, спонтанно формирующаяся плёнка является жидкой, т.е. не имеющей модуля упругого сдвига и пренебрежимо малую сдвиговую вязкость. Тогда ускоренное затухание волн, приводящее к увеличению величины виртуального касательного волнового напряжения, должно производить более интенсивное вихревое течение, что является одним из предметов исследования настоящей диссертации.

Следующий, совершенно не похожий на предыдущий, тип реализации разделения времён достигается в турбулентном течении двумерной жидкости в режиме конденсата. Как известно, в турбулентном течении двумерной жидкости реализуется обратный каскад энергии, то есть в течении, характеризующимся большим числом Рейнольдса, энергия передаётся от более мелких вихрей, интенсивность которых поддерживается постоянной каким-либо внешним воздействием, более крупным вихрям [17], смотри также обзор [18]. Характерная интенсивность течения v на каждом масштабе r определяется единственной ве-

личиной — мощностью на единицу массы ϵ , передаваемой вверх по масштабам, $v \sim (\epsilon r)^{1/3}$. Для неограниченного по площади течения размер самых крупных вихрей определяется балансом притока энергии с более мелких масштабов и её диссипацией за счёт трения о дно. В установившемся обратном каскаде кинетическая энергия сосредоточена в самых больших вихрях, тогда как градиент скорости достигает максимальных значений в вихрях самых малых размеров. Поэтому нелинейное взаимодействие между вихрями близких размеров оказывается намного сильнее, чем их взаимодействие с вихрями намного более крупных размеров, в результате чего и можно говорить о каскаде энергии, т.е. о многостадийной передаче энергии по цепочке масштабов. Если же при прочих равных условиях течение оказывается ограниченным в пространстве, то самыми крупными вихрями оказываются автоматически вихри с размером L порядка размера области течения. Для того, чтобы обеспечить баланс энергии на этом масштабе, характерная скорость V в этих вихрях должна быть намного больше, чем её оценка, полученная для обратного каскада, $V \gg (\epsilon L)^{1/3}$. Но тогда нелинейное взаимодействие значительно более мелких вихрей на масштабах $r \gtrsim \sqrt{\epsilon L^3/V^3}$ [19] с самыми крупными вихрями оказывается сильнее, чем нелинейное взаимодействие этих мелких вихрей между собой. Передача энергии самым большим вихрям будет теперь происходить не по цепочке, а непосредственно от вихрей с характерным масштабом $\sqrt{\epsilon L^3/V^3}$. Поддержание дифференциального вращения в крупных вихрях мелкомасштабными турбулентными пульсациями наблюдается во многих системах и условно называют отрицательной турбулентной вязкостью [20]. Описание процесса передачи возможно качественно описать в рамках уравнения Навье-Стокса, линеаризованного относительно поля скорости мелких вихрей, но с учётом их нелинейного взаимодействия с полем скорости самых крупных вихрей [21]. Самые же крупные вихри оказываются статистически устойчивыми во времени, потому их также называют когерентными, а само течение конденсатом. Вследствие их свойств — устойчивости во времени и относительно большой интенсивности — их называют конденсатом, или когерентными вихрями. Такие вихри наблюдались как в натурном эксперименте в тонких слоях жидкости [22—24], так и в численном счёте [25; 26], смотри также обзоры [27; 28].

В определённом смысле комбинация выше описанных двух типов разделения времён достигается в турбулентном течении быстро вращающейся несжимаемой жидкости. Вращение жидкости как целого с угловой скоростью Ω приводит

к появлению в ней выделенного направления. Сила Кориолиса для части течения, поле скорости которого не зависит от координаты вдоль оси вращения, оказывается чисто потенциальной и потому не влияющей на его динамику [29; 30]. Это течение можно назвать квази-двумерным, поскольку его скорость в большинстве случаев направлена в плоскости, ортогональной оси вращения, вследствие ограничений, налагаемых геометрией границ, а его динамика при высоких числах Рейнольдса определяется нелинейным само-воздействием. Его также называют геострофическим [31], поскольку силы Кориолиса в нём балансируются давлением. Динамика второй части течения, поле скорости которого существенно зависит от продольной координаты, определяется силой Кориолиса и потому оказывается намного быстрее. В главном приближении эволюция этого течения описывается уравнением Навье-Стокса, линеаризованным по его амплитуде, так что это течение представляет собой инерционные волны с частотой порядка частоты вращения Ω [32]. Таким образом, вращающаяся жидкость поддерживает турбулентный режим течения, в котором геострофические долго-живущие вихри [33—35] поддерживаются распространяющимися на их фоне турбулентными пульсациями, представляющими собой инерционные волны [36].

Похожее, но более сложное разделение течения осуществляется в стратифицированной жидкости, в которой наряду с внутренними волнами, имеющими схожий закон дисперсии с инерционными волнами [37], существует медленное течение в виде вихрей, горизонтальный размер которых велик по сравнению с вертикальным [38]. В этих вихрях горизонтальное течение имеет наибольший градиент в вертикальном направлении, что создаёт условие для поглощения относительно короткой внутренней волны в критической плоскости [39]. Захватываются волны, переносящие горизонтальный импульс только определённого знака, тогда как волны с противоположным знаком потока импульса отражаются [37]. В результате от волн медленному течению может передаваться энергия [40]. Мы исследуем аналогичный эффект во вращающейся жидкости, устанавливая его статистические свойства путём рассмотрения динамики ансамбля инерционных волн на фоне геострофического течения.

Если длина инерционных волн мала по сравнению с размером поглощающих их вихрей, то описание процесса поглощения можно производить в пределе слабо неоднородного, т.е. гладкого, поля скорости в вихре, что соответствует приближению так называемой теории быстрых искажений [41]. В случае статистически изотропного случайного течения эта теория наиболее полно развита

для скалярного поля, переносимого течением и подверженного процессу диффузии [42; 43]. Эта теория, в частности, изучает, каким образом ускоряется процесс гомогенизации пространственного распределения скаляра за счёт неоднородности течения [44], или, иными словами, за счёт перемешивания. Неоднородность течения аналогичным образом действует и на другие поля — например, поля инерционной волны во вращающейся жидкости или внутренней волны в стратифицированной жидкости [45] и магнитное поле в проводящей жидкости [46; 47]. В рамках изучения выбранной темы исследования это является обоснованием для изучения более простой модели перемешивания скалярного поля. Мы изучаем, как крупномасштабные флуктуации потока на фоне среднего аксиально-симметричного вихревого течения, которое локально представляет собой сдвиговое течение, ускоряют процесс перемешивания, и как по разноточечным корреляционным функциям скалярного поля, которые могут быть измерены в эксперименте, можно восстановить статистические свойства градиента самого поля скорости.

Степень разработанности темы исследования. Генерация приповерхностных течений поверхностными волнами на чистой поверхности жидкости изучалась теоретически в пионерской работе [7] для одиночной плоской волны и в работах [48; 49] для системы волн, распространяющихся в произвольных направлениях. Влияние поверхностной плёнки на скорость затухания поверхностных волн изучалась в работах [14; 15; 50]. Нам неизвестны работы других авторов, где исследовалось бы влияние жидкой поверхностной плёнки на темп генерации вихревого течения системой поверхностных волн, распространяющихся в общем случае в разных направлениях. Подробный обзор литературы по генерации поверхностными волнами приповерхностных вихревых течений приведён во Введении Главы 1.

Наблюдение геострофических долгоживущих вихрей во вращающейся жидкости наблюдалось в натурных экспериментах с различной постановкой, см., например, [33; 34; 51], и в численных моделированиях, см., например, [35; 52]. Исследование поглощения инерционных волн геострофическим течением путём численного моделирования производилось в работах [36]. Нам не известны теоретические работы других авторов по исследованию распространения инерционных волн на фоне геострофического течения, по исследованию вклада ансамбля инерционных волн в тензор Рейнольдса в уравнении на среднее течение в аксиально-симметричном вихре и анализу этого уравнения с точки зрения

радиального профиля средней скорости. Подробный обзор литературы по распространению инерционных волн на фоне геострофического течения приведён во Введении Главы 2, а по долгоживущим геострофическим вихрям — во Введении Главы 3.

Аналитическое исследование зависимости одноточечных моментов скалярного поля, имеющего заданную начальную статистику пространственного распределения и далее пассивно переносимого случайным статистически изотропным потоком, проведено в [42; 43], проверка этих результатов путём численного счёта производилась в работах [53; 54]. Экспериментальное исследование одноточечных моментов в трёх-мерном изотропном потоке было проведено в [55]. Исследование процесса перемешивания скаляра в случайном потоке с сильно сдвиговой компонентой путём численного моделирования было произведено в [56]. Нам не известны теоретические работы других авторов по исследованию статистики перемешивания скаляра в случайном гладком потоке с сильной постоянной сдвиговой компонентой, а также по установлению общей связи между разноточечными корреляционными функциями скаляра и статистикой градиента поля скорости потока, когда поток является статистически изотропным. Подробный обзор литературы по перемешиванию пассивно переносимых гладким потоком скалярных полей дан во Введении Главы 4.

Целью данной работы является построение и развитие теории взаимодействия вихревых структур с волнами, в частности: 1) построение теории, описывающей возбуждение приповерхностных вихрей поверхностными волнами в условиях покрытия поверхности жидкости тонкой жидкой плёнкой; 2) построение теории поддержания мелкомасштабным турбулентным течением когерентного геострофического вихревого течения; 3) теоретическое исследование статистики перемешивания скалярного поля случайным гладким потоком с сильной постоянной сдвиговой компонентой и теоретическое развитие методов измерения статистики поля скорости по наблюдаемой статистике перемешивания скалярного поля.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать влияние поверхностной жидкой плёнки на генерацию поверхностными волнами вихревого течения. Установить общее выражение, связывающее вихревое течение с волновым движением.

2. Исследовать частный случай несжимаемой плёнки. Установить соотношение эйлеровой скорости и скорости дрейфа Стокса в этом пределе. Рассмотреть случай произвольного значения сжимаемости плёнки, исследовать зависимость скорости генерации вихревого течения от этого параметра.
3. Исследовать частные случаи волнового течения — двух волн, распространяющихся под прямым углом друг к другу, и двух волн, распространяющихся под малым углом друг к другу.
4. Разработать методы интерпретации результатов эксперимента в свете построенной теории и провести сравнение с экспериментальными данными.
5. Исследовать структуру когерентного геострофического вихря в турбулентном течении быстро вращающейся жидкости для модельной задачи с периодическими граничными условиями.
6. Исследовать структуру когерентного геострофического вихря считая, что число Россби приближается снизу к единице. Исследовать статистику турбулентных пульсаций в этом режиме течения.
7. Исследовать влияние границ, ортогональных оси вращения жидкости как целого, на радиальный профиль когерентного вихря. Исследовать зависимость от высоты сосуда эффективности передачи энергии вихрю от турбулентности.
8. Исследовать влияние неоднородности вихревого течения на поглощение им инерционных волн, выработать картину и критерии эффективного поглощения в этом случае. Провести качественное сравнение с экспериментальными данными.
9. Исследовать распространение аксиально-симметричных волн конденсата в радиальном направлении на фоне среднего течения в вихре.
10. Исследовать связь разноточечной парной корреляционной функции пассивного скаляра в гладком случайном статистически изотропном поле скорости в присутствии слабой, но конечной диффузии, со статистическими свойствами потока.
11. Исследовать связь угловых особенностей корреляционной функции четвёртого порядка со статистическими свойствами потока, когда поток является хаотическим, статистически однородным и изотропным, в двумерном и трёхмерном случаях.

12. Исследовать статистику перемешивания пассивного скаляра в потоке, представляющем собой сдвиговое течение, на которое наложена слабая случайная во времени и гладкая в пространстве поправка. В частности, вычислить одноточечные моменты пассивного скаляра.

Научная новизна: Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. В частности, впервые исследовано влияние поверхностной плёнки на генерацию поверхностными волнами вихревых течений, взаимное влияние ансамбля инерционных волн и среднего геострофического вихревого течения, а также связь разноточечных корреляционных функций пассивного скаляра со статистикой градиента поля скорости. В литературных обзорах, приведённых во введениях Глав 1–4, раскрыты истории исследований в соответствующих областях и подробно показано место и новизна данного диссертационного исследования. В ряде случаев в диссертации проводится сравнение аналитических результатов с данными физических и численных экспериментов, выполненных другими авторами.

Практическая значимость определяется применимостью построенной теории к интерпретации экспериментальных данных.

Развитые в диссертационной работе аналитические подходы и полученные результаты позволяют описывать нелинейное взаимодействие волн со средним гидродинамическим вихревым течением, в частности, генерацию вихревого течения поверхностными волнами в присутствии поверхностной жидкой плёнки и поддержание геострофического вихревого течения инерционными волнами, а также влияние установившегося вихревого течения на перенос и перемешивание полей.

Построенная качественная картина исследуемых физических явлений на основе полученных результатов позволяет более оптимально спланировать эксперимент и выбрать путь анализа экспериментальных данных. Большая часть полученных результатов уже прошла верификацию путём сравнения с экспериментальными данными и с данными численного эксперимента.

Результаты аналитических расчётов влияния поверхностной жидкой плёнки на генерацию приповерхностного вихревого течения, полученные в наших работах [57; 58], были с успехом применены для анализа генерации вихревого течения в следующей нашей работе [59], где показано, что теория с одним априори неизвестным параметром — величиной модуля упругого сжатия поверхностной плёнки — хорошо описывает всю совокупность экспериментальных

данных. Построенная теория в нашей работе [60], описывающая возбуждение крупномасштабного приповерхностного вихревого течения двумя поверхностными волнами, распространяющимися под малым углом друг к другу, была успешно наложена на позже полученные экспериментальные данные [61].

Линейно-логарифмический профиль, полученный в нашей работе [62] для когерентного геострофического вихря в отсутствии трения о дно, был впоследствии наблюден в численном моделировании двумерного когерентного течения [63], к которому применимо аналогичное описание. В нашей работе [64] мы развили теорию распространения пакетов инерционных волн в неоднородном геострофическом течении, которая позволила успешно интерпретировать представленные в этой работе экспериментальные данные. В этом же эксперименте было продемонстрировано, что циклоны являются более устойчивыми и долгоживущими, что на качественном уровне согласуется с результатами нашей работы [65]. Кроме того, крупные циклоны, наблюдавшиеся в [64], имеют радиальный профиль, близкий к плоскому в определенном интервале расстояний до оси, что согласуется с предсказаниями нашей работы [66].

Построенная нами теория перемешивания пассивного скаляра в гладком поле скорости со случайной компонентой [67—69] может быть применена для интерпретации данных перемешивания скаляра как в геострофическом когерентном течении, так, например, и в течениях эластической турбулентности [70; 71] или двумерном течении в канале [72].

Работа имеет теоретический характер, что, в частности, обосновывает её **теоретическую значимость**. Вихревые течения, вызванные затуханием поверхностных волн в том числе в присутствии поверхностной плёнки, могут войти наряду с акустическими течениями в классические учебники гидродинамики, такие как [2]. Развиваемое инерционными волнами касательное напряжение Рейнольдса, выявленное нами, имеет обще-гидродинамическое значение для вихревых столбовых структур, встречающихся в разных вариантах в природе. Наконец, установленная простая связь между разноточечными корреляционными функциями скаляра и функцией распределения ляпуновских экспонент в случайном потоке также достойна войти в монографии по статистической гидродинамике.

Методология и методы исследования. Общая методология исследования основывается на анализе уравнения Навье-Стокса и уравнения переноса. Течение жидкости предполагается суперпозицией быстро и медленно изменяющихся

во времени течений. Динамика быстрой компоненты описывается линеаризованным по её амплитуде уравнением. В случае поверхностных волн это есть просто уравнение свободного волнового распространения, поскольку медленное течение предполагается слабым. В случае когерентных течений во вращающейся жидкости следует учесть также преломление инерционных волн в когерентном течении благодаря его слабой неоднородности. Затем исследуется усреднённое по времени уравнение Навье-Стокса, являющееся уравнением на медленную компоненту течения. В этом уравнении фигурирует усреднённый вклад, квадратичный по амплитуде быстрого течения. В случае поверхностных волн его принято называть виртуальным волновым напряжением, в случае когерентного течения — напряжением Рейнольдса. Если известны статистические свойства возбуждающей быстрое течение силы, то уравнение на медленное течение оказывается полностью определённым и может быть последовательно исследовано. При описании статистики перемешивания пассивного скаляра в гладком поле скорости, имеющем случайную компоненту, мы не ограничиваемся моделями, где случайная компонента скорости коротко коррелирована во времени. В ряде случаев мы пользуемся тем, что статистика разбегания двух лагранжевых траекторий в таком течении может быть выражена на больших временах в терминах функции Крамера (энтропийной функции), которая описывает в том числе большие отклонения от среднего. В этом случае для вычисления корреляционных функций скаляра мы устанавливаем оптимальную флуктуацию — реализацию случайного процесса, который даёт наибольший вклад в корреляционную функцию с учётом вероятности этой реализации. Диффузия предполагается малой, но конечной.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получено аналитическое выражение для приповерхностного вихревого течения, вызванного волновым движением, в присутствии поверхностной плёнки. Передача импульса от волн вихревому течению происходит в тонком слое, включающем в себя гребни и впадины волны вместе с вязким подслоем. Механизм возбуждения вихревого течения может быть интерпретирован как результат действия эффективной поверхностной касательной силы — виртуального волнового напряжения. Присутствие плёнки увеличивает затухание волны и, тем самым, приводит к увеличению амплитуды виртуального волнового напряжения.
2. Установлено, что присутствие несжимаемой плёнки на поверхности приводит к увеличению амплитуды вынужденного вихревого течения в

$\sim 1/\gamma$ раз ($\gamma = \sqrt{\nu k^2/\omega}$ — малый параметр теории, ω , k — частота и волновое число, ν — кинематическая вязкость), по порядку величины во столько же раз сокращается добротность волны по сравнению с пределом чистой поверхности. По мере снижения модуля упругого растяжения плёнки амплитуда вынужденного вихревого течения ведёт себя немонотонно, достигая сперва максимума, а затем убывая до своего значения для чистой поверхности. Значения амплитуды в максимуме и в пределе несжимаемой плёнки имеют один и тот же порядок. В этой области параметров амплитуда скорости дрейфа Стокса пренебрежимо мала по сравнению с амплитудой установившейся во времени эйлеровой части массового транспорта.

3. Установлена аналитическая зависимость амплитуды вихревого течения от горизонтальной и вертикальной координат, величины модуля упругого сжатия плёнки и времени, когда волновое движение представляет собой две ортогональные бегущие или стоячие волны. То же самое сделано для случая двух распространяющихся под малым углом друг к другу волн. Поскольку в последнем варианте масштаб вихревого течения значительно превышает длину волн, исследован кроме того предел, когда жидкость является глубокой для волн, но должна быть учтена её конечная глубина при описании динамики вихревого течения.
4. Разработан комбинированный метод опосредованного измерения модуля упругого сжатия плёнки, который является основным параметром при описании возбуждения вихревого течения поверхностными волнами. Метод включает в себя одновременное измерение линейной скорости затухания волн с учётом трения о стенки бассейна, соотношения амплитуд вертикальной и горизонтальной скоростей в волне и амплитуды возбуждаемого вихревого течения.
5. Установлен механизм, по которому инерционные волны передают свою энергию крупномасштабному геострофическому вихревому течению. Показано, что благодаря этому механизму инерционные волны формируют радиально-азимутальное напряжение Рейнольдса в аксиально-симметричных вихрях, которое действует как отрицательная турбулентная диффузия, поддерживая дифференциальное вращение в вихре. Найден радиальный профиль средней скорости в вихре в отсутствии трения о дно — линейно-логарифмическая зависимость. Показано,

что часть энергии, которая выделяется в тепло благодаря действию вязкости в секторе инерционных волн, мала, если число Рейнольдса для волн велико.

6. Установлены радиальные профили циклонов и анти-циклонов при различных числах Россби и Рейнольдса. Показано, что у циклонов максимум средней азимутальной скорости сдвигается ближе к оси вихря, тогда как антициклонов — дальше от оси вихря по сравнению с пределом малого числа Россби, для которого имеет место линейно-логарифмический профиль. Рассчитано значение напряжения Рейнольдса в циклонах и антициклонах.
7. Установлена роль границ, ортогональных оси вращения, в формировании радиального профиля когерентного вихря. Выше масштаба, на котором сравнивается действие объёмной вязкости и эффективное трение о дно, доминирует трение о дно, которое изменяет линейно-логарифмический профиль на профиль с постоянным значением азимутальной скорости. Кроме того, мы установили, что трение о дно может снижать эффективность передачи энергии когерентному течению от турбулентных пульсаций только в случае, если эти пульсации являются мелко-масштабным геострофическим течением.
8. Установлены закономерности распространения пакета инерционных волн в слабо-неоднородном геострофическом аксиально-симметричном вихревом течении. Показано, что для того, чтобы инерционная волна могла быть поглощена геострофическим течением, требуется, чтобы разность скоростей в разных областях геострофического течения превосходила групповую скорость волны. Показано, что поглощение производит селекцию волн: волны, которые несут момент количества движения, по знаку противоположный направлению вращения в геострофическом вихре, не поглощаются, а отражаются, уходя обратно на периферию вихря.
9. Установлен закон дисперсии для аксиально-симметричных волн конденсата в предположении, что источником поддержания когерентного течения является геострофическое мелко-масштабное течение. В конденсате, насыщение которого достигнуто за счёт трения о дно, в высокочастотной области закон дисперсии линеен, а длина пробега велика по сравнению с

длиной волны. В вязком конденсате закон дисперсии совпадает с законом дисперсии волн в вязком нестационарном слое.

10. Установлено, что парная корреляционная функция пассивного скаляра в распадной задаче пропорциональна плотности функции распределения расстояния между двумя близкими лагранжевыми траекториями в гладком случайном поле скорости.
11. Установлены угловые особенности корреляционной функции четвёртого порядка в задаче о перемешивании пассивного скалярного поля случайным во времени гладким полем скорости с изотропной статистикой. В трёхмерном случае было показано, что корреляционная функция четвёртого порядка пропорциональна плотности распределения степеней растяжения элементарного объёма жидкости в результате действия потока. Двумерное течение оказывается слишком низкоразмерным для этой корреляционной функции, и потому она оказывается существенно зависящей от величины молекулярной диффузии. Пространственная зависимость корреляционной функции была найдена сперва методом поиска оптимальной флуктуации поля скорости, результат затем был верифицирован путём установления уравнения на эту корреляционную функцию и прямого его решения. Установлено, что угловая зависимость на относительно умеренных расстояниях представляет собой резкий пик, тогда как на более далёких расстояниях зависимость сменяется степенной.
12. Установлена статистика моментов пассивного скаляра для распадной задачи, когда перемешивание происходит в двумерном течении с сильной сдвиговой компонентой. Статистика выражена через преобразование Лежандра от функции Крамера, описывающей статистику деформации малого элемента жидкости на больших временах. Для задачи с непрерывным возбуждением флуктуаций пассивного скаляра установлено, что хвост функции распределения, описывающий высокие моменты, является экспоненциальным, тогда как тело функции распределения близко к нормальному распределению. Установлены свойства функции Крамера для модельной задачи с коротко-коррелированным по времени полем скорости.

Достоверность полученных результатов обеспечивается надёжностью применённых аналитических методов. Часть из полученных результатов получила

подтверждения в натурных и численных экспериментах. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными ранее другими исследователями.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: научных сессиях Совета по нелинейной динамике (г. Москва, 2019-2021, 2023 гг.), XX Научной школе «Нелинейные Волны – 2022» (г. Нижний Новгород), международных конференциях «Landau Days 2020», «Landau Days 2021», «Landau Days 2022» в г. Черноголовка, «Landau Week» (г. Ереван, 2023), «XXIII Зимней школе по механике сплошных сред» (г. Пермь, 2023), Warwick Turbulence Symposium (Warwick, 2006), V Международной конференции «Наука будущего» (г. Орёл, 2023), Третьей Международной Конференции «Физика конденсированных состояний» ФКС-2023 (г. Черноголовка), школах-конференциях «Современная гидродинамика 2023», «Современная гидродинамика 2024» (г. Черноголовка), Школе-конференции по теоретической физике конденсированного состояния (г. Саров, 2024), Русско-индийской конференции «Frontiers of Theoretical Condensed Matter Physics» (г. Черноголовка, 2024), Юбилейной международной конференции — 60 лет Институту теоретической физики им. Л.Д. Ландау (г. Черноголовка, 2024), международном симпозиуме «Неравновесные процессы в сплошных средах 2024» (г. Пермь), XXI научной школе «Нелинейные волны – 2024» (г. Нижний Новгород), на семинарах в Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН (Черноголовка), Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН (Москва, 2023), Институте океанологии им. П.П. Ширшова РАН (Москва, 2023, 2024), НИИ Механики МГУ (Москва, 2024), Объединённом институте высоких температур РАН (Москва, 2024), Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (2024), Институте Теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН (2024), Институте прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН (2024), Пермском национальном исследовательском политехническом университете (2024).

Личный вклад. Все результаты, приведённые в данной диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии. В диссертацию вошли только аналитические части работ [59; 64], содержащих в себе также и результаты натурного эксперимента. Эти аналитические результаты были получены автором лично. Экспериментальные данные в виде графиков приводятся ради наглядной демонстрации результатов аналитических вычислений и их соответствия результатам измерений. В работах [62; 73] личный вклад автора состоял в постановке задачи, выработке метода решения, проверке вычислений и анализе результатов; из работы [73] в данную диссертацию вошёл только общий

метод оценки корреляционных функций скорости без рассмотрения структурной функции.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, 13 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 3 приложений. Полный объём диссертации составляет 286 страниц, включая 27 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 218 наименований.

Первая глава посвящена построению теории возбуждения приповерхностных вихрей поверхностными волнами в условиях покрытия поверхности жидкости тонкой жидкой плёнкой. В Пункте 1.1 “Введение” приводится развёрнутый обзор литературы, касающейся возбуждения поверхностными волнами вихревых течений. В частности, показано, что генерация волновым движением средних потоков вследствие образования вблизи границы течения вязкого пограничного слоя с последующим его нелинейным взаимодействием с полным волновым движением носит общий характер. Аналогичная генерация наблюдается также при вязком трении поверхностных волн о дно на неглубокой воде, для инерционных волн во вращающейся жидкости при трении о стенки течения и при трении звуковых волн о границы течения; в последнем случае индуцированные вихревые течения называются акустическими. Рассматриваемый нами случай свободной поверхности, покрытой сжимаемой плёнкой, оказывается особым, поскольку в этом случае амплитуда индуцированного течения приобретает величину по обратному корню из вязкости. Далее в Пункте 1.2 формулируются управляющие уравнения, включая граничные условия на свободной поверхности, условия массового переноса вещества в плёнке и связь её поверхностного натяжения с поверхностной концентрацией этого вещества. Жидкость предполагается глубокой для волн. В Пункте 1.3 эти уравнения решаются в линейном по амплитуде волн приближении с целью определения характеристик волны, играющих роль при нелинейном возбуждении вихревых течений: зависимости скорости затухания волн, отношения горизонтальной и вертикальной амплитуд колебания лагранжевой частицы на поверхности и структуры вязкого пограничного слоя от величины модуля упругости плёнки. В Пункте 1.4 производится разделение поля скорости всего течения на волновое и вихревое течение. В волновом движении выделяется дрейф Стокса, который рассчитывается с учётом влияния поверхностной плёнки. Присутствие плёнки не изменяет дрейф Стокса вне вязкого погранично-

го слоя, однако внутри него и, в частности, на самой поверхности, относительное изменение дрейфа Стокса оказывается порядка единицы. В Пункте 1.5 получены общие выражения для вихревого течения с учётом влияния плёнки. Воздействие подсистемы волн на среднее вихревое течение можно представить как действие касательной силы, приложенной к поверхности жидкости, называемой виртуальным волновым напряжением. Динамика вихревого течения описывается уравнением Стокса, поскольку характеризующее его число Рейнольдса предполагается малым. Таким образом, проникновение завихренности медленного течения вглубь описывается диффузионным уравнением. Показано, что присутствие плёнки не изменяет пространственной структуры вихревого течения, однако сильно влияет на его амплитуду. Эти общие выражения адаптируются для случая распространения двух волн под прямым углом друг к другу в Пункте 1.6, когда формируются вихри, расположенные в шахматном порядке. Проведено сравнение предсказаний теории с экспериментом, в котором исследовалась динамика вихревого течения в результате сначала быстрого возбуждения поверхностных волн, затем их продолжительного воздействия с постоянной амплитудой, а затем быстрого их исчезновения. Случай распространения двух волн под малым углом друг к другу рассмотрен в Пункте 1.7, когда формируются вихри с масштабом, значительно превышающим длину волны. Рассмотрен промежуточный предел, когда жидкость глубока для волн, но имеет конечную глубину с точки зрения вихревого течения. Часть вычислений для этого случая вынесена в Приложение А. В Пункте 1.8 “Заключение” подводятся итоги этой части исследования.

Во **Второй главе** содержится первая часть исследования механизмов существования долгоживущих геострофических вихрей, поддерживаемых поглощением инерционных волн — изучение динамики инерционных волн на фоне крупномасштабного вихревого течения. В Пункте 2.1 “Введение” содержится обзор литературы по течению быстро вращающейся жидкости. Такие течения можно разложить на две подсистемы, слабо взаимодействующие между друг другом — геострофическое течение, однородное вдоль оси вращения, и инерционные волны. Разделение происходит по скорости динамики, которая у геострофического течения относительно мала как число Россби. Для того, чтобы ввести основные объекты исследования, в Пункте 2.2 выводится уравнение Рейнольдса на среднее течение в вихре, содержащее напряжение Рейнольдса, которое является квадратичным по амплитуде волн и есть среднее по их ансамблю. Его условно положительный знак соответствует феномену отрицательной турбулентной вяз-

кости, а условно отрицательный — обычной турбулентной вязкости. В Пункте 2.3 исследуется динамика волн на фоне среднего вихревого течения в линейном приближении по их амплитуде в предположении, что среднее течение представляет собой однородное в пространстве сдвиговое течение. Далее в Пункте 2.4 производится расчёт средних величин, квадратичных по амплитудам волн, — их средней кинетической энергии, напряжения Рейнольдса и скорости вязкой диссипации в подсистеме волн. В Пункте 2.5 эти вычисления проводятся до конца в пределе малого числа Россби для модельного случая статистически изотропной силы, возбуждающей инерционные волны. Показано, что средняя кинетическая энергия волн имеет логарифмическую величину по сравнению с напряжением Рейнольдса, знак которого соответствует отрицательной турбулентной вязкости. В Пункте 2.6 рассматривается задача о распространении инерционных волн в другой постановке, когда волна распространяется на фоне аксиально симметричного вихревого течения, имеющего произвольный медленно меняющийся в пространстве профиль радиальной зависимости скорости. Показано, что поглощение волн происходит в критическом слое, перед которым волна исчезает за счёт передачи своей энергии геострофическому вихрю. В Пункте 2.7 “Заключение” подводятся итог полученным закономерностям.

В Третьей главе изучаются радиальные профили среднего течения в долгоживущих вихрях в зависимости от контрольных безразмерных параметров течения и граничных условий. В Пункте 3.1 “Введение” дан обзор литературы по наблюдению и изучению долгоживущих вихрей в двумерных и вращающихся трёхмерных турбулентных потоках. Пункт 3.2 посвящён самой простой модели, когда стохастическая сила, возбуждающая течение, коротковолновая и статистически изотропная, число Россби мало, а границы течения отсутствуют. В этом случае удаётся аналитически решить уравнение Рейнольдса, результатом чего является линейно-логарифмический профиль среднего течения в вихре. Далее в Пункте 3.3 эта модель расширяется на случай конечных чисел Россби, когда появляется различие между циклонами и антициклонами. Для конечного числа Россби уже не удаётся аналитически найти ни напряжение Рейнольдса как функции числа Россби и конечной вязкости, ни решение уравнения Рейнольдса. В результате численного решения сначала уравнения на линейную динамику волн, последующего усреднения напряжения Рейнольдса по ансамблю волн и затем решения уравнения Рейнольдса мы устанавливаем, что в циклонах максимум скорости смещается к его центру по сравнению с предсказанием линейно-логарифмического реше-

ния, тогда как в антициклонах, наоборот, это смещение происходит от центра. В Пункте 3.4 производится учёт влияния горизонтальных стенок. Горизонтальные границы приводят к появлению эффективного трения о дно в уравнении на геострофическое течение. Мы определяем масштаб, на котором сравниваются влияния объёмной вязкости и трения о дно и находим радиальный профиль вихря на масштабах больше и меньше, чем этот масштаб. В Подпункте 3.4.5 производится анализ экспериментальных данных на основе теории, разработанной в этой и предыдущей главах для поглощения инерционных волн аксиально симметричным вихрём. В Пункте 3.5 изучается динамика крупномасштабных аксиально симметричных возбуждений, называемых также зональными течениями, на фоне среднего вихревого течения. Наконец, полученные результаты суммируются и анализируются в Пункте 3.6 “Выводы”.

В Четвёртой главе развита теория, устанавливающая связь между корреляционными функциями скаляра и размешивающего его гладкого в пространстве и хаотического во времени поля скорости, в том числе, имеющего сильную постоянную сдвиговую компоненту. Эту задачу можно рассматривать как скалярную модель, соответствующую преломлению векторного поля инерционной волны в слабо неоднородном вихревом течении. Скалярная модель проще, что позволяет включить в неё и систематически исследовать влияние крупномасштабных флуктуаций вихревого течения. Обзор литературы произведён в Пункте 4.1 “Введение”. Описание математической модели перемешивания в гладком случайном поле скорости дано в Пункте 4.2, где, в частности, обсуждаются общие свойства статистики лагранжевых траекторий в гладких случайных потоках. Определяются две постановки задачи о перемешивании скаляра — распадная задача и задача с непрерывной накачкой. Свойства часто используемой модели коротко-коррелированного во времени градиента поля скорости приведены в Приложении Б. Связь свойств парной корреляционной функции в распадной задаче со статистикой градиента поля скорости установлена в Пункте 4.3. В этой связи в статистике поля скорости играет роль только распределение главной степени растяжения элемента объёма жидкости потоком. Для корреляционной функции четвёртого порядка это сделано в следующем Пункте 4.4. В случае трёхмерного течения эта корреляционная функция связана со совместной функцией распределения главной и следующей степеней растяжения элемента жидкости. В случае двумерного течения независимой степенью растяжения является только первая (главная), вследствие чего существенную роль в искомой связи играет

диффузия. Получение уравнений на корреляционные функции скаляра в модели коротко-коррелированного во времени градиента поля скорости вынесено в Приложение В. Статистические свойства перемешивания в случайном течении с сильной сдвиговой компонентой, в частности, одноточечные моменты скаляра, изучены в Пункте 4.5. В Пункте 4.6 “Заключение” производится анализ совокупности полученных результатов.

В **Заключении** подведены основные итоги исследования, сформулированы рекомендации по использованию полученных результатов и обозначены перспективы дальнейшей разработки темы исследования.

Глава 1. Возбуждение вихревых течений поверхностными волнами в присутствии плёнки

1.1 Введение

Перенос массы в горизонтальном направлении под поверхностью жидкости в условиях возбуждённого волнового движения уже давно является предметом как теоретических исследований, так и практического интереса. Первой попыткой объяснить это явление является классическая работа Дж. Г. Стокса [74]. В этой работе рассмотрен перенос массы в бегущей волне в идеальной жидкости, так что течение всюду остаётся потенциальным. Было показано, что движение лагранжевых частиц, усреднённое по периоду колебаний волны, характеризуется скоростью дрейфа, которая квадратична по амплитуде волны. Позже М. Лонге-Хиггинс обнаружил, что вязкость жидкости нарушает потенциальное приближение не только в линейном порядке по амплитуде волны внутри вязкого подслоя вблизи поверхности, но и в квадратичном порядке, существенно изменяя скорость среднего по времени переноса массы [7].

Влияние вязкости жидкости на массовый транспорт может быть объяснено следующим образом. Бегущая поверхностная волна обладает импульсом, направленным по направлению её распространения. Поверхностная плотность этого импульса пропорциональна квадрату амплитуды волны. Она совпадает с интегральным по вертикали потоком массы в виде дрейфа Стокса. Вязкая диссипация приводит к ослаблению амплитуды волны по мере её распространения. Падает и импульс, связанный с волновым движением. Однако, в силу закона сохранения количества движения, недостающий импульс передаётся жидкости. Передача происходит посредством действия виртуальной силы, которая условно приложена в тонком приповерхностном слое, включающем в себя гребни и впадины волны, а также вязкий подслой. Эта сила — виртуальное волновое касательное напряжение — пропорциональна вязкости и квадрату амплитуды волны [75]. Действие этой силы приводит к возбуждению медленного вихревого течения, которое затем распространяется в объём жидкости [76]. Если возбуждённое течение слабое, так что оно не турбулентно, то его амплитуда в установившемся режиме не зависит от вязкости жидкости, хотя оно и обязано ей своим происхождением. Дальней-

шие работы по этой теме были направлены на переформулирование задачи в лагранжевом описании и на адаптацию главного результата для океанологии — исследование нестационарного случая и влияния сил Кориолиса [75; 77—82]. С методической точки зрения интересна также работа [83], в которой проведено сравнение разных математических подходов к описанию явления.

В 2010х годах снова возник интерес к этому явлению, но в более сложной постановке задачи: как будет устроен поток массы если на поверхности возбуждены жидкости две скрещенные волны [49; 84—86], геометрически более сложное волнение [87] или хаотическое волнение [88—90]? Теоретический анализ для жидкости с чистой свободной поверхностью, на которой возбуждены две стоячие волны, распространяющиеся ортогонально друг другу в условиях глубокой воды, показал, что в стационарном режиме формируется решётка приповерхностных вихрей с периодом, определяемым длиной волны [49]. (Можно отметить более раннюю работу [48], в которой получено выражение для виртуального поверхностного напряжения при произвольном волнении, но она весьма трудна к прочтению и извлечению результата.) В вихрях вертикальная компонента скорости равна нулю, так что они полностью характеризуются вертикальной компонентной завихренности, распределение которой в пространстве образует шахматную доску. Теория, развитая в [49], объяснила многие особенности возбуждаемого течения, наблюдавшегося экспериментально: его амплитуда была пропорциональна произведению амплитуд волн и синусу разности фаз между волнами. Однако численное согласие эксперимента и теории не было достигнуто: в эксперименте амплитуда течения оказалась на порядок выше теоретических предсказаний.

Причина состояла в том, что поверхность воды в реальных условиях всегда не является свободной от тонкой поверхностной плёнки. Существование поверхностной плёнки приводит к изменению граничных условий. В частности, это изменение приводит к резкому возрастанию скорости затухания волны, почти не меняя её закон дисперсии. В одной из ранних работ [91] по этой теме было замечено, в том числе, что скорость затухания волны может меняться со временем. Это означает, что поверхностная плёнка является результатом процесса адсорбции поверхностно-активных молекул из воздуха, которые захватываются поверхностью воды вследствие её большой диэлектрической проницаемости. В дальнейшем исследование роли поверхностной плёнки в динамике волн проводилось в ряде работ, смотри [14; 15; 50] и более поздние работы [13; 16]. В

частности, повышенная диссипация у волн на поверхности воды вследствие присутствия плёнки не позволяет экспериментально наблюдать обратный каскад в слабой турбулентности гравитационных волн, смотри [92]. Среди других эффектов, вызванных существованием плёнки, можно отметить изменение геометрии стационарных вихревых течений вследствие сопротивления со стороны плёнки неограниченному сжатию поверхности и неустойчивости этих течений вследствие динамических свойств плёнки [93].

Серия работ [57—60], по материалам которых написана эта глава, посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию роли поверхностных плёнок в генерации поверхностными волнами приповерхностного вихревого течения, а также исследованию генерации течения с масштабом, значительно превышающим длину волны. Стартовой идеей послужило то, что плёнка параметрически сильно увеличивает скорость затухания волны, смотри решение для несжимаемой плёнки в классической монографии [8]. Соответственно этому должно увеличиваться виртуальное волновое касательное напряжение. На основании этого была проделана работа [57]. Затем более тщательный анализ экспериментальных данных показал, что модель несжимаемой плёнки является неудовлетворительной, поскольку горизонтальная компонента скорости в волне на поверхности не обращается в ноль, как это имеет место в случае несжимаемой плёнки. Это наблюдение говорило о том, что на поверхности воды присутствовала сжимаемая плёнка.

Свойства плёнки нам были априори не известны, поскольку процесс её формирования является неконтролируемым. Плёнка является результатом адсорбции поверхностно активных молекул из воздуха лаборатории. Поэтому нам следовало выбрать модель плёнки, характеризующуюся минимально возможным количеством параметров, и определить экспериментальные методы измерения этих параметров. В общем случае реологические свойства плёнки могут быть описаны четырьмя коэффициентами, если предполагается слабая степень её деформации: упругий коэффициент растяжения, вторая вязкость (определяющая диссипативную реакцию пленки при растяжении/сжатии), упругий модуль сдвига и сдвиговая (первая) вязкость [94]. В нашей модели мы полагаем, что диссипация вследствие внутренней вязкости плёнки мала по сравнению с вязкой диссипацией в объёме жидкости, и на этом основании мы пренебрегаем обеими вязкостями плёнки. Это приближение оправданно, если $\eta \gg \eta_s k$, где η_s есть коэффициент динамической вязкости плёнки, k — волновое число, а η — динамическая вязкость

жидкости; иными словами, мало число Буссинеска $k\eta_s/\eta \ll 1$ [93], или, что то же самое, длина Саффмана-Дельбрюка η_s/η мала по сравнению с характерным масштабом течения $1/k$, $\eta_s/\eta \ll 1/k$ [95]. Кроме того, мы предполагаем, что плёнка является жидкой, то есть она не оказывает реакции при сдвиговых деформациях. Критерием этого приближения является экспериментальный факт возбуждения вихревых течений [59]. Обратным примером является экспериментальная работа [96], в которой плёнка обладала сдвиговой эластичностью, и потому вихревые горизонтальные течения были подавлены. Наконец, мы предполагаем, что плёнка сформирована нерастворимыми молекулами, и потому масса плёнки (количество вещества в ней) сохраняется. В результате плёнка в нашей модели описывается только одним параметром — модулем упругого растяжения. Теоретически построенная модель была рассмотрена нами в работе [58]. Эта модель хотя и является упрощённой, не охватывающей все возможные случаи, но, как показано в нашей следующей работе [59], она достаточно хорошо описывает экспериментальные результаты. На основании этого, в частности, мы не рассматривали возможности фазового перехода в плёнке типа газ-жидкость, который наблюдался для специально созданных плёнок в работе [97].

Последней нашей работой из этой серии является исследование свойств генерации вихревых течений, масштаб которых заметно превышает характерную длину поверхностных волн [60]. Исследование было мотивировано, в частности, работами [84; 98], в которых экспериментально демонстрировалась такая генерация. Кроме того, имеется ряд работ [89; 90], в которых генерация крупномасштабного вихревого течения объясняется обратным каскадом энергии двумерной турбулентности. В пользу этой интерпретации авторы приводят измеренный колмогоровский спектр энергии течения на поверхности $\propto k^{-5/3}$, при этом обратный каскад энергии начинается с масштаба длины волны. Вместе с тем, жидкость является глубокой для волн, то есть масштаб, на котором возбуждаются вихри, является существенно меньшим глубины жидкости. Это обстоятельство делает предположение об обратном каскаде сомнительным, поскольку скорее должен развиваться прямой трёх-мерный каскад энергии. Действительно, теория обратного каскада энергии применима только для двумерных и квази-двумерных систем [18], тогда как рассматриваемый случай оказывается существенно трёхмерным. Это общее понимание было проверено в ряде численных моделирований, в которых было показано, что при подобных отношениях толщины жидкости и масштаба накачки обратный каскад энергии не реализуется

[99—101]. Таким образом, механизм передачи энергии от коротких волн течению с характерными размерами во всю ячейку (бассейн) оставался неясным.

В экспериментальных работах [59; 84], посвящённых исследованию шахматной доски вихрей, возбуждаемой двумя ортогональными монохроматическими стоячими волнами, на больших временах наблюдалось развитие крупномасштабного течения с размером на весь бассейн. Согласно измеренному спектру энергии поверхностного течения [84], вихри промежуточных размеров при этом не были возбуждены. Таким образом, в этом случае возбуждение крупно-масштабного течения не может быть объяснено обратным каскадом. На сколько нам известно, какого-либо другого объяснения этому явлению предложено не было. Заметим, что дальнейшее увеличение числа Рейнольдса приводит к возбуждению волн с существенно отличными частотами вследствие четырёх-волнового взаимодействия [102], что значительно усложняет течение жидкости.

В работе [60] нами был предложен и исследован механизм непосредственного возбуждения крупномасштабного вихревого течения поверхностными волнами. Механизм реализуется, если в волновом движении присутствует две волны, распространяющиеся под малым углом друг к другу. В случае возбуждения волн через фарадеевскую неустойчивость, одновременно оказываются возбуждёнными несколько мод, среди которых найдётся по крайней мере одна пара распространяющихся под малым углом друг к другу [89; 90]. Что касается экспериментов, где волны возбуждаются колеблющимися плунжерами (горизонтально расположенные цилиндры специального поперечного сечения, которые под действием крепежа сверху совершают вертикальные колебания по заданному закону), установленными вдоль бортов прямоугольного бассейна [49; 59; 98], то имеются экспериментальные свидетельства [98] того, что плунжеры возбуждают также и волны, распространяющиеся под небольшим углом к бортам бассейна ('косые волны'). Возбуждение косых волн происходит, по-видимому, вследствие краевых эффектов: плунжеры не доходят до краёв бассейна на 2 – 3 см. Интенсивность косых волн относительно мала по сравнению с интенсивностью волн, распространяющихся строго параллельно бортам бассейна. Однако, согласно развитой нами теории, возбуждаемое нелинейным взаимодействием обеих типов волн крупномасштабное течение имеет амплитуду, обратно пропорциональную углу между направлением распространения этих волн. Таким образом, малость амплитуды косых волн компенсируется малостью угла. Позднее предложенный

нами механизм был целенаправленно и детально исследован экспериментально в работе [61].

Отметим, что обсуждаемый феномен является представителем общего класса стационарных течений, возникающих во втором порядке по амплитуде некоторого осциллирующего течения вследствие существования вязкого пограничного слоя [103]. Другими примерами этого класса являются i) акустические течения, возбуждаемые в слабо-вязкой жидкости звуковыми волнами, [4; 6], смотри также [2, § 80], ii) вихревые геострофические течения, вызванные инерционными волнами [104; 105], iii) течения, произведённые поверхностными волнами в вязком пограничном слое у дна [7] и iv) течения, вызванные быстро колеблющимся в жидкости твёрдым телом [106]. Во всех случаях медленное течение есть результат усреднения тензора Рейнольдса в вязком пограничном слое вблизи твёрдой границы или вблизи свободной поверхности. Характерным свойством установившихся акустических течений и вязких течений, возбуждённых в вязком пограничном слое вблизи твёрдой стенки или свободной поверхности без плёнки, является независимость их амплитуды от вязкости. Рассматриваемый нами случай свободной поверхности, покрытой плёнкой, нарушает это правило — интенсивность установившихся медленных течений обратно пропорциональна корню из вязкости при достаточной величине упругого модуля сжатия плёнки.

Работы автора, опубликованные в журналах ВАК, на основании которых написана эта Глава 1, в порядке их хронологического следования: [57], [58], [59], [60].

1.2 Уравнения течения жидкости и граничные условия на свободной поверхности

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости, поверхность которой покрыта тонкой плёнкой. В объёме течение описывается уравнением Навье-Стокса (см., например, [2; 8]),

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{v}$ есть поле скорости жидкости, ρ есть её массовая плотность, а ν — кинематическая вязкость. Введём декартову систему координат $Oxyz$, ось Oz которой

направлена вверх. В уравнении (1.1) модифицированное давление P включает в себя потенциальную энергию единицы массы в поле гравитации, так что физическое давление $P_{phys} = P - \rho g z$, где g — ускорение свободного падения. Поскольку жидкость несжимаема, поле скорости удовлетворяет условию бездивергентности $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Кроме объёмного уравнения должны быть определены условия на границах течения. Предполагается, что снизу течение ограничивает твёрдое горизонтальное дно, расположенное на глубине $z = -d$. На твёрдой границе все три компоненты скорости равны нулю: равенство нулю нормальной компоненты скорости называют условием непротекания, а равенство нулю двух тангенциальных компонент называют условием прилипания. По горизонтали течение мы считаем неограниченным, пока не оговорено противное. В состоянии покоя жидкость сверху имеет границей плоскость $z = 0$, покрытую плёнкой, над которой находится воздух. В силу малой массовой плотности воздуха, его достаточно моделировать пустотой с точки зрения динамики жидкости. На верхней границе имеют место кинематическое и динамическое граничные условия.

Кинематическое граничное условие устанавливает связь скорости течения со скоростью изменения формы поверхности жидкости. Пусть отклонение формы поверхности от равновесной определяется функцией $h(t, x, y)$, так что поверхность задаётся условием $z = h$. Отметим, что мы не рассматриваем конфигурации поверхности с обрушениями, так что h является однозначной функцией координат. Кинематическое граничное условие означает, что точки поверхности жидкости переносятся со скоростью $\mathbf{v}(t, x, y, h)$:

$$\partial_t h = v_z - v_\alpha \partial_\alpha h. \quad (1.2)$$

Здесь и далее первыми буквами греческого алфавита $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ в индексах мы обозначаем $\{x, y\}$ -компоненты векторов, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Предполагается слабость отклонения формы поверхности от равновесного состояния, что выражается неравенством $|\nabla h| \ll 1$.

Динамическое граничное условие есть выражение того факта, что со стороны воздуха к жидкости, покрытой плёнкой, не приложены никакие силы. Для математической формулировки этого условия определим единичную нормаль $\mathbf{l}$ к поверхности,

$$\mathbf{l}(t, x, y) = \frac{(-\partial_x h, -\partial_y h, 1)}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}}, \quad (1.3)$$

проектор на касательную плоскость к поверхности $\delta_{ij}^\perp = \delta_{ij} - l_i l_j$ и тензор кривизны поверхности $K_{ik} = K_{ki} = \delta_{ij}^\perp \partial_j l_k$. Буквами из середины латинского алфавита $\{i, j, k, l, \dots\}$ мы обозначаем все три $\{x, y, z\}$ -компоненты векторных (тензорных) величин. Средняя кривизна поверхности $K = K_{ii}$, где ∂_j есть частная производная по j -й координате. Обратим внимание, что комбинация $\delta_{ij}^\perp \partial_j$ означает, что в действительности пространственное дифференцирование производится только вдоль поверхности, как и должно быть. Ниже нам понадобится выражение для средней кривизны в линейном приближении по возмущению поверхности,

$$K = -\Delta^\perp h, \quad \Delta^\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2. \quad (1.4)$$

Напомним также, что в общем случае средняя кривизна поверхности K есть сумма главных кривизн поверхности $1/R_{1,2}$, $K = 1/R_1 + 1/R_2$, где положительный знак у радиусов $R_{1,2}$ соответствует выгнутой вверх поверхности, а отрицательной — соответственно, вогнутой вниз поверхности. Далее, плёнка характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения, который может изменяться во времени и быть неоднородным вдоль плёнки, $\sigma = \sigma(t, \mathbf{r})$. Заметим, что поверхностное натяжение определено только на плёнке, а зависимость от всех трёх координат указывается исключительно для упрощения формальных вычислений; в действительности дифференцирование функции σ по пространственным аргументам будет всегда производиться только вдоль поверхности. Поверхностная массовая плотность плёнки предполагается пренебрежимо малой. В итоге условие отсутствия нормальной силы, действующей со стороны воздуха, приобретает вид (см., например, [2, §63] или [107])

$$P_{phys} = P - \rho g h = 2\rho \nu l_i l_k \partial_i v_k + \sigma K. \quad (1.5)$$

Слева в уравнении (1.5) стоит физическое давление в жидкости под плёнкой, справа сумма вклада в давление от вязкого тензора напряжений и давления под искривлённой поверхностью, обладающей поверхностным натяжением. Условие отсутствия касательной силы, приложенной к поверхности со стороны воздуха, приводит к равенству соответствующих компонент вязкой части тензора напряжений в жидкости и силы, возникающей в плёнке за счёт неоднородности распределения вдоль неё поверхностного натяжения:

$$\rho \nu \delta_{ij}^\perp l_k (\partial_j v_k + \partial_k v_j) = \delta_{ij}^\perp \partial_j \sigma. \quad (1.6)$$

Мы предполагаем модель плёнки, для которой поверхностное натяжение определяется только её поверхностной плотностью n , так что зависимость от времени и координат можно заменить зависимостью $\sigma = \sigma(n)$, $n = n(t, \mathbf{r})$:

$$\delta_{ij}^\perp \partial_j \sigma = \sigma' \delta_{ij}^\perp \partial_j n, \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{dn}. \quad (1.7)$$

Величина $-n\sigma'(n)$ может быть названа модулем сжатия плёнки. Мы рассматриваем модель плёнки, которая образована поверхностно-активным веществом, растворением которого в жидкости можно пренебречь. Вследствие этого нет временной задержки между растяжением плёнки и результирующим изменением поверхностной плотности. Тогда динамика поверхностной плотности определяется уравнением переноса вдоль плёнки,

$$\partial_t n + \delta_{ij}^\perp \partial_j (n v_i) = 0, \quad (1.8)$$

где скорость есть скорость жидкости на поверхности. Закон сохранения вещества плёнки (1.8) делает замкнутым набор уравнений движения жидкости с плёнкой на её поверхности.

Описывая вихревое течение, произведённое волнами вблизи поверхности, нам будет удобным пользоваться завихренностью $\varpi = \text{curl } \mathbf{v}$ вместо скорости $\mathbf{v}$. В дальнейшем нам удобна будет тензорная запись. В связи с этим перепишем уравнение Навье-Стокса (1.1) в терминах завихренности путём вычисления ротора от обеих частей (см., например, [2; 8]), получив так называемое вихревое уравнение:

$$\partial_t \varpi = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varpi + (\varpi \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \varpi. \quad (1.9)$$

Граничное условие на завихренность

$$l_m l_k \partial_k \varpi_m + (\partial_i v_k + \partial_k v_i) \epsilon_{imq} l_m K_{kq} = 0, \quad (1.10)$$

может быть получено из граничного условия на баланс касательных к поверхности сил (1.6) посредством действия на обе его части дифференциального оператора $\epsilon_{imq} l_m \partial_q$ (содержащим производные только вдоль поверхности). Мы определили единичный полностью анти-симметричный тензор (символ Леви-Чивиты) ϵ_{ijk} , так что, например, завихренность покомпонентно равна $\varpi_i = \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$. При выводе уравнения (1.10) мы использовали тождество $\epsilon_{imq} l_m \partial_q l_i = \epsilon_{imq} l_m K_{qi} = 0$, которое может быть проверено прямым вычислением. Заметим, что градиент поверхностного натяжения не входит в граничное условие

(1.10), поскольку поверхностная сила, возникающая вследствие пространственной неоднородности поверхностного натяжения, имеет потенциальный характер. В дальнейшем это обстоятельство значительно упрощает нелинейный анализ.

1.3 Описание волнового движения в линейном приближении

Линейный анализ поверхностных волн в рассматриваемой системе хорошо известен, см., например, [14; 15; 50]. У закона дисперсии существует две ветви — гравитационно-капиллярные волны и волны Марангони. С точки зрения динамики плёнки гравитационно-капиллярные волны являются преимущественно поперечными, а волны Марангони — продольными. В дальнейшем мы предполагаем, что гравитационно-капиллярные волны являются слабо затухающими. Как будет показано ниже, это обеспечивается, если безразмерный параметр

$$\gamma = \sqrt{\nu k^2 / \omega} \ll 1, \quad (1.11)$$

где ω и k суть частота и волновое число волны. Волны Марангони затухают гораздо быстрее, и по этой причине они нами не рассматриваются. Обычно, слабо затухающие гравитационно-капиллярные волны рассматриваются в приближении потенциального течения. Нам необходимо рассмотреть, как конечная вязкость жидкости нарушает это приближение, и как присутствие поверхностной плёнки изменяет амплитуду вихревой компоненты течения. Поскольку в дальнейшем полное поле скорости $\mathbf{v}$ в нашем анализе будет складываться из быстрого волнового движения и медленного вихревого течения, то, исследуя отдельно волновое движение, соответствующее ему поле скорости будем обозначать $\mathbf{u}$.

Итак, линеаризуем систему уравнений (1.1)-(1.8) и найдём решение в виде плоской волны, в которой все величины имеют зависимость $\propto \exp(ik_\alpha r_\alpha - i\omega t)$ от времени и горизонтальных координат, например

$$h = a \exp(ik_\alpha r_\alpha - i\omega t). \quad (1.12)$$

Обозначим волновое число $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$. Линеаризованное уравнение Навье-Стокса (1.1) имеет вид

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla P / \rho + \nu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (1.13)$$

Взяв дивергенцию от обеих частей (1.13) и используя условие бездивергентности скорости $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, получим, что давление P удовлетворяет уравнению Лапласа, $\nabla^2 P = 0$, так что

$$P = P_0 e^{kz} e^{ik_\alpha r_\alpha - i\omega t}, \quad z \leq 0. \quad (1.14)$$

Уравнения на компоненты скорости теперь получаются подстановкой решения (1.14) в линейризованное уравнение Навье-Стокса (1.13):

$$(\partial_t + \nu k^2 - \nu \partial_z^2) \tilde{u}_\alpha = -ik_\alpha P_0 e^{kz} / \rho, \quad (1.15)$$

$$(\partial_t + \nu k^2 - \nu \partial_z^2) \tilde{u}_z = -k P_0 e^{kz} / \rho, \quad (1.16)$$

где $u_i = \tilde{u}_i \exp(ik_\alpha r_\alpha - i\omega t)$. Система уравнений имеет решение, которое является суммой частного решения (потенциальное течение) и общего решения (вихревое течение):

$$\tilde{u}_\alpha = \frac{k_\alpha P_0}{\rho \omega} e^{kz} + \kappa \tilde{\psi}_\alpha e^{\kappa z}, \quad \tilde{u}_z = \frac{-ik P_0}{\rho \omega} e^{kz} - ik_\alpha \tilde{\psi}_\alpha e^{\kappa z}. \quad (1.17)$$

Мы ввели обозначение

$$\kappa = \sqrt{k^2 - i\omega/\nu}, \quad (1.18)$$

в котором у квадратного корня выбирается ветвь, имеющая положительную действительную часть. Связь между коэффициентами в (1.17) учитывает условие бездивергентности $ik_\alpha \tilde{u}_\alpha + \partial_z \tilde{u}_z = 0$. Для того, чтобы найти константы P_0 и $\tilde{\psi}_\alpha$, мы должны использовать граничные условия.

В линейном приближении граничные условия должны накладываться при $z = 0$. Обозначим равновесные значения поверхностной массовой плотности плёнки и её поверхностного натяжения n_0 и σ_0 соответственно. Тогда текущее значение этих величин $n = n_0 + \delta n$, $\sigma = \sigma_0 + \sigma'(n_0) \delta n$, а граничные условия (1.6) и (1.8) дают

$$\rho \nu (\partial_\alpha u_z + \partial_z u_\alpha) = \sigma'(n_0) \partial_\alpha \delta n, \quad (1.19)$$

$$\partial_t \delta n + n_0 \partial_\alpha u_\alpha = 0. \quad (1.20)$$

Далее, подставляя решение (1.17) в уравнения (1.19) и (1.20), получаем

$$\delta \tilde{n} = \frac{n_0}{\omega} \left(\frac{k^2 P_0}{\rho \omega} + \kappa k_\alpha \tilde{A}_\alpha \right), \quad \tilde{A}_\alpha = -\frac{k_\alpha P_0}{\rho \omega \kappa} D, \quad (1.21)$$

где $\delta n = \delta \tilde{n} \exp(ik_\alpha r_\alpha - i\omega t)$, а параметр D зависит от свойств поверхностной плёнки:

$$D = \frac{2i\gamma - \varepsilon}{i\gamma \frac{\kappa^2 + k^2}{\kappa k} - \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{-n_0 \sigma'(n_0)}{\rho \sqrt{\nu \omega^3 / k^2}}. \quad (1.22)$$

Соотношение между давлением P_0 и возмущением формы поверхности h может быть найдено из кинематического граничного условия (1.2). В линейном приближении оно имеет вид $\partial_t h = u_z$ и опять таки должно быть применено при $z = 0$. Получим

$$P_0 e^{ik_\alpha r_\alpha - i\omega t} = \frac{i\rho \omega \partial_t h}{k \left(1 - \frac{k}{\kappa} D\right)}. \quad (1.23)$$

Мы видим, что свойства плёнки входят только в уравнения на поверхностную плотность и давление (1.21, 1.23), где они фигурируют исключительно в виде комплексного безразмерного параметра D , который в свою очередь выражается через параметр ε , смотри выражение (1.22). Параметр ε может быть назван безразмерным модулем упругого сжатия плёнки. Напомним, что сделанное нами предположение о мгновенном отклике напряжения в плёнке на её поверхностную плотность означает, что поверхностный модуль упругого сжатия $-n_0 \sigma'(n_0)$ является действительным. Кроме того, он положителен, поскольку плёнка предполагается термодинамически устойчивой [108]. В главном приближении по малому параметру γ выражение для D (1.22) упрощается до

$$D = \frac{\varepsilon - 2i\gamma}{\varepsilon - e^{i\pi/4}}. \quad (1.24)$$

Предельный случай плёнки с бесконечно большим модулем упругости соответствует $\varepsilon \rightarrow \infty$, $D \rightarrow 1$. В этом пределе плёнка может считаться нерастяжимой в линейном приближении, т.е. $n(t, x, y) = n_0$. Ниже мы называем этот предел “почти несжимаемой плёнкой”, где ‘почти’ означает, что плёнка всё же сжимаема, если учесть второй порядок по амплитуде волны. Если плёнка отсутствует, то $\varepsilon \rightarrow 0$, а $D \rightarrow 2\kappa k / (\kappa^2 + k^2)$. При конечных значениях ε параметр D порядка или меньше единицы. Следовательно, величина kD/κ мала по крайней мере как $\gamma \ll 1$, то есть поверхностная плёнка изменяет в первую очередь соленоидальную (вихревую) часть горизонтальной скорости. Далее, если $|D| \sim 1$, то эта вихревая поправка становится сравнимой по амплитуде с потенциальной частью скорости в вязком подслое. Если же на поверхности нет плёнки, то $|D| \sim \gamma$, и потенциальная часть скорости является всюду преобладающей.

1.3.1 Поле скорости

Комбинируя соотношения (1.17), (1.21) и (1.23), возможно выразить все три компоненты скорости через форму поверхности h :

$$u_\alpha = \frac{(e^{kz} - D e^{\kappa z})}{k \left(1 - \frac{k}{\kappa} D\right)} \partial_\alpha \partial_t h, \quad u_z = \frac{\left(e^{kz} - \frac{k}{\kappa} D e^{\kappa z}\right)}{\left(1 - \frac{k}{\kappa} D\right)} \partial_t h. \quad (1.25)$$

Как уже было указано в (1.17), скорость является суммой двух слагаемых,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\phi + \mathbf{u}^\psi. \quad (1.26)$$

Первое слагаемое $\mathbf{u}^\phi$ пропорционально e^{kz} и соответствует потенциальной части поля скорости,

$$\mathbf{u}^\phi = \text{grad } \phi, \quad \phi = \frac{e^{kz}}{k \left(1 - \frac{k}{\kappa} D\right)} \partial_t h, \quad (1.27)$$

которая проникает вглубь на глубину $1/k$. Второе слагаемое $\mathbf{u}^\psi$ пропорционально $e^{\kappa z}$, его происхождение обязано ненулевой вязкости и присутствию поверхностной плёнки. Этот вихревой вклад может быть параметризован векторной функцией тока

$$u_\alpha^\psi = \partial_z \psi_\alpha, \quad u_z^\psi = -\partial_\alpha \psi_\alpha, \quad \psi_\alpha = -\partial_\alpha \left(\frac{e^{\kappa z} D}{k \kappa \left(1 - \frac{k}{\kappa} D\right)} \partial_t h \right). \quad (1.28)$$

Глубина проникновения вихревого вклада

$$\delta = \frac{1}{\text{Re } \kappa} = \frac{\sqrt{2} \gamma}{k} \quad (1.29)$$

намного меньше, чем $1/k$, и, таким образом, он локализован в тонком вязком подслое около поверхности жидкости. Ниже вязкого подслоя, на глубинах $h - z \gg \delta$, возможно пренебречь вкладом $\mathbf{u}^\psi$ в скорость жидкости. То есть, на таких глубинах поле скорости является потенциальным. Заметим, что проделанный линейный анализ волнового движения предполагает, что глубина жидкости d значительно превышает глубину проникновения потенциальной части течения, $dk \gg 1$.

Для дальнейших вычислений нам понадобится завихренность $\varpi = \text{curl } \mathbf{v}$. Она определяется только вихревой частью поля скорости, и таким образом, также локализована внутри вязкого подслоя. Прямое вычисление даёт

$$\varpi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \frac{(\kappa^2 - k^2) D}{\kappa k \left(1 - \frac{k}{\kappa} D\right)} e^{\kappa z} \partial_\beta \partial_t h, \quad \varpi_z = 0, \quad (1.30)$$

где $\epsilon_{\alpha\beta}$ есть единичный антисимметричный тензор второго ранга. Завихренность направлена горизонтально в линейном приближении по амплитуде волны. Заметим также, что горизонтальная завихренности ϖ_α существенно зависит от свойств плёнки, она (почти) пропорциональна параметру D (1.22).

1.3.2 Закон дисперсии и добротность волны

Последнее граничное условие (1.5) позволяет получить закон дисперсии. В линейном приближении оно записывается в виде

$$P - 2\rho\nu\partial_z u_z = \rho gh - \sigma_0 \nabla^2 h, \quad (1.31)$$

после чего получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \left(1 - \frac{k}{\kappa} D\right) \left(gk + \frac{\sigma_0}{\rho} k^3\right) - 2i(1 - D)\nu k^2 \omega. \quad (1.32)$$

Теперь напомним, что мы интересуемся пределом слабо затухающих волн, $\gamma = \sqrt{\nu k^2/\omega} \ll 1$, то есть когда отношение $|k/\kappa| \sim \gamma \ll 1$. Поскольку же безразмерный параметр ϵ является действительным, то абсолютное значение параметра D по порядку величины не превышает единицы. Тогда, в главном приближении по малому параметру $\gamma \ll 1$, получаем закон дисперсии гравитационно-капиллярных волн

$$\omega^2 = gk + (\sigma_0/\rho)k^3. \quad (1.33)$$

Влияние плёнки здесь состоит только в возможном изменении равновесного значения поверхностного натяжения σ_0 . Исследуя поправки к этому закону дисперсии, возможно найти мнимую часть частоты $\text{Im } \omega$, которая описывает затухание волны. Используя соотношение (1.32) и приближённое равенство $k/\kappa \approx \gamma e^{i\pi/4}$, получаем для обратной добротности волны

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} = -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}} (\text{Re } D + \text{Im } D) - \gamma^2 + \mathcal{O}(D\gamma^2). \quad (1.34)$$

В выражении (1.34) должны быть удержаны только главные вклады по малому параметру γ . В частности, если $\text{Re } D + \text{Im } D \sim 1$, то второе слагаемое в (1.34) следует опустить, поскольку при выводе (1.34) уже были отброшены вклады того же порядка. Приближённое выражение (1.24) даёт [15]

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} = -2\gamma^2 - \frac{\gamma}{2\sqrt{2}} \frac{\epsilon^2}{(\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{2} + 1)} + f(\epsilon)\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3), \quad (1.35)$$

	ε	D	$\text{Im } \omega/\omega$
несжимаемая плёнка	$\varepsilon \gg 1$	1	$-\gamma/2\sqrt{2}$
сжимаемая плёнка	$\sqrt{\gamma} \lesssim \varepsilon \lesssim 1$	$\gamma \lesssim \text{Re } D + \text{Im } D \lesssim 1$	Ур. (1.35)
свободная поверхность	$\varepsilon \ll \sqrt{\gamma}$	$2\kappa k/(\kappa^2 + k^2)$	$-2\gamma^2$

Таблица 1 — Соответствие между свойствами плёнки, значениями параметров ε , D и скоростью затухания волны.

где $f(\varepsilon)$ есть некоторая ограниченная по абсолютному значению функция и $f/\varepsilon \rightarrow \text{const}$ при $\varepsilon \ll 1$. В предельном случае почти несжимаемой плёнки $D = 1$, и мы получаем $\text{Im } \omega/\omega = -\gamma/2\sqrt{2}$ (для капиллярных волн этот результат приведён, например, в [2]). С другой стороны, если $\text{Re } D + \text{Im } D \sim \gamma$, тогда первые два слагаемых в (1.34) сравнимы друг с другом, а опущенные при выводе вклады малы по сравнению с этими двумя. Для свободной поверхности $D = \gamma\sqrt{2}(1+i) + \mathcal{O}(\gamma^2)$, и относительная скорость затухания $\text{Im } \omega/\omega = -2\gamma^2$. Можно отметить, что, действительно, условие $\gamma \ll 1$ означает, что волна затухает медленно, а присутствие плёнки параметрически усиливает затухание волны. Жидкость в условиях $\gamma \ll 1$ мы будем называть слабо-вязкой жидкостью.

1.3.3 Зависимость характеристик волны от модуля упругости плёнки

Пример зависимости (1.35) обратной добротности (затухания) волны от обратного безразмерного модуля упругого сжатия плёнки приведена на Рисунке 1.1a). Можно было бы ожидать, что влияние плёнки на поле скорости и на скорость затухания волны наибольшее, когда плёнка почти несжимаема. Однако это не так. В частности, максимум относительного затухания, равный $\text{Im } \omega/\omega = \gamma/\sqrt{2}$, достигается при конечной сжимаемости плёнки $\varepsilon = \sqrt{2}$. Качественно наличие максимума можно объяснить резонансом между гравитационно-капиллярными волнами и волнами Марангони [109]. В этих модах по-прежнему $k/\kappa \ll 1$, но они почти не связаны с изменением формы поверхности, т.е. потенциальная часть течения относительно мала [108]. Из выражений для потенциальной и вихревой частей скорости (1.27, 1.28) следует, что для плоской монохроматической волны $(\psi/\phi)|_{z=0} = -i(k/\kappa)D$. Таким образом, волны Марангони соответствуют пределу

$D \gg 1$, то есть дисперсия этих мод может быть найдена путём приравнивая нулю знаменателя во втором слагаемом в (1.35), что приводит к уравнению $\varepsilon = \sqrt{i}$ (можно отметить, что эти волны — быстро затухающие). Гравитационно-капиллярная волна вызывает локальные сокращения и растяжения плёнки, которые в свою очередь приводят к градиенту поверхностного натяжения. Такое движение плёнки соответствует движению плёнки в волне Марангони, и факт существования последней наиболее существенен вблизи частоты, где пересекаются дисперсионные кривые этих двух волн. Более подробное обсуждение свойств волн Марангони можно найти в работах [108; 110] и в недавней работе [109].

Параметры ε и D , помимо зависимости от свойств плёнки, также зависят от частоты ω и волнового числа k волны. Следовательно, поверхностная плёнка различным образом влияет на волны различной частоты. Согласно (1.35), плёнка значительно увеличивает затухание волны, если $\varepsilon \gg \sqrt{\gamma}$. Предположим, например, что модуль сжатия плёнки $-n_0\sigma'(n_0)$ не зависит от масштаба. Тогда отношение $\varepsilon/\sqrt{\gamma}$ пропорционально $k^{7/8}$ для гравитационных волн и $k^{-3/8}$ для капиллярных волн. Следовательно, максимум отношения достигается в точке $k = k_*$, где $k_* = \sqrt{7g\rho/3\sigma_0}$, которая находится в области перехода в законе дисперсии от гравитационных к капиллярным волнам. Если максимальное значение отношения $(\varepsilon/\sqrt{\gamma})_{k=k_*} \gg 1$, то существует диапазон волновых чисел $k_{min} < k < k_{max}$, содержащий точку k_* и ограниченный неравенством $\varepsilon/\sqrt{\gamma} \gtrsim 1$, в котором плёнка существенно увеличивает затухание волны. Например, отношение $(\varepsilon/\sqrt{\gamma})_{k=k_*}$ принимает значение в диапазоне $15 \div 35$ для некоторых типов мономолекулярных плёнок на воде при значениях модуля сжатия $-n_0\sigma'(n_0) \sim 20 \div 40 \text{ erg/cm}^2$ [94]. Вне этого диапазона затухание волны изменено присутствием плёнки незначительно. В Таблице 1 кратко просуммированы результаты рассмотрения предельных случаев и указаны соответствия между этими предельными случаями и значениями параметров ε и D .

С точки зрения экспериментального определения безразмерного модуля сжатия плёнки ε полезно знать отношение амплитуд горизонтального $\|u_\alpha\|/\omega$ и вертикального $\|u_z\|/\omega$ колебаний лагранжевой частицы на поверхности жидкости, поскольку эти две амплитуды могут быть измерены независимо. Из выражений (1.25), взятых при $z = 0$, получаем, что в

$$\frac{\|u_\alpha\|}{\|u_z\|} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1}}. \quad (1.36)$$

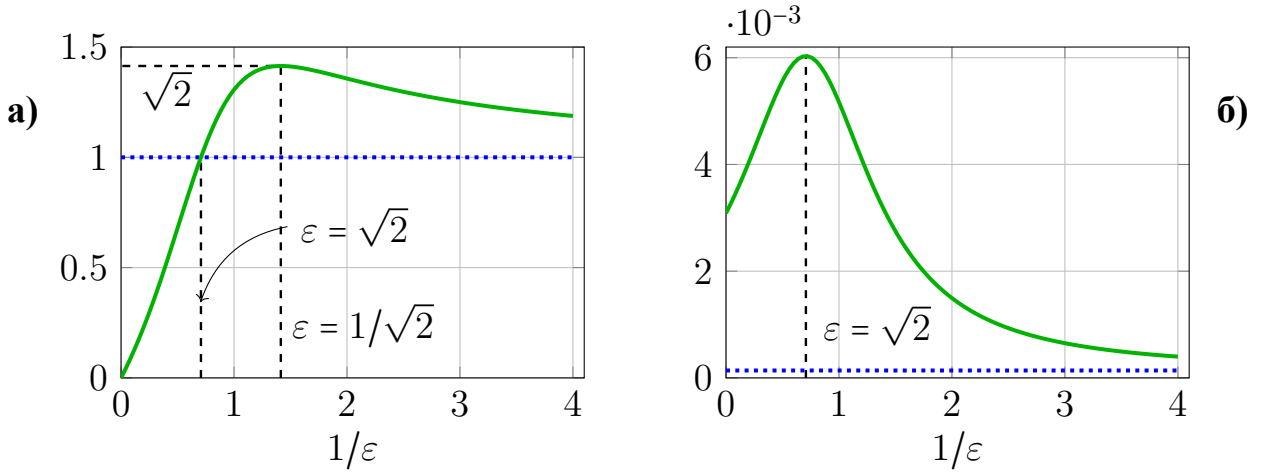


Рисунок 1.1 — Зависимости от обратного значения безразмерного модуля упругого сжатия плёнки $1/\varepsilon$: а) отношения амплитуд горизонтальной и вертикальной компонент скорости (амплитуд колебаний) лагранжевой частицы в волне (1.36); б) обратной добротности волны (1.35). Численное значение $\gamma \approx 1/120$, что соответствует волнам на воде при частоте 3 Гц. Синими точечными линиями показаны асимптотики для чистой поверхности, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Зависимость отношения амплитуд (1.36) от $1/\varepsilon$ изображена на Рисунке 1.1б). Почти несжимаемой плёнке соответствует отношение (1.36), равное нулю. Для свободной поверхности амплитуды равны, то есть лагранжева частица описывает круг в поле волны. Однако при увеличении силы плёнки отношения сначала растёт, достигая своего максимального значения $\sqrt{2}$ при $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$. При дальнейшем увеличении силы плёнки отношение становится снова равным единице при $\varepsilon = \sqrt{2}$; в этой точке, напомним, достигается максимум затухания.

Полученные выражения могут быть формально обобщены на случай, когда возмущение поверхности $h(t,x,y)$ представляет собой произвольную суперпозицию плоских волн. В этом случае следует заменить комплексные величины $-i\omega$, k , κ на соответствующие операторы: $-i\omega \rightarrow \partial_t$, $k \rightarrow \hat{k} = (-\partial_x^2 - \partial_y^2)^{1/2}$, $\kappa \rightarrow \hat{\kappa} = (\partial_t/\nu + \hat{k}^2)^{1/2}$. Операторы $\hat{k}, \hat{\kappa}$ являются нелокальными в пространстве (а последний также нелокальным во времени), квадратные корни в определениях этих операторов должны выбираться с положительной действительной частью. Эти обозначения удобны и будут использованы ниже.

1.3.4 Предел несжимаемой плёнки

Рассмотрим отдельно предел почти несжимаемой плёнки. В линейном приближении такая плёнка должна считаться абсолютно несжимаемой. Тогда в уравнении (1.20) производная по времени от поверхностной плотности равна нулю. Мы приходим к следующим граничным условиям на плоскости $z = 0$:

$$\partial_\alpha u_\alpha = 0, \quad \partial_z u_z = 0, \quad (1.37)$$

где второе граничное условие следует из условия несжимаемости течения $\nabla \mathbf{u} = 0$. Условие $\varepsilon \gg 1$, требуемое для того, чтобы плёнка считалась несжимаемой, записывается в виде

$$\left(\frac{n_0 \sigma'}{\rho} \right)^2 \gg \frac{\nu}{k} \left(g + \frac{\sigma_0}{\rho} k^2 \right)^3. \quad (1.38)$$

Как видно, условие (1.38) лучше всего выполняется опять таки в области перехода от гравитационных к капиллярным волнам. Подставляя $D = 1$ в общие выражения для скорости (1.25) и завихренности (1.30), получаем

$$u_\alpha = \nu \frac{\hat{\kappa}(\hat{\kappa} + \hat{k})}{\hat{k}} \left(e^{\hat{k}z} - e^{\hat{\kappa}z} \right) \partial_\alpha h, \quad (1.39)$$

$$u_z = \nu \hat{\kappa}(\hat{\kappa} + \hat{k}) \left(e^{\hat{k}z} - \frac{\hat{k}}{\hat{\kappa}} e^{\hat{\kappa}z} \right) h, \quad (1.40)$$

$$\varpi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \frac{\hat{\kappa} + \hat{k}}{\hat{k}} e^{\hat{\kappa}z} \partial_\beta \partial_t h. \quad (1.41)$$

В выражениях (1.40, 1.40, 1.41) были отброшены вклады, относительно малые как γ^2 . Горизонтальная скорость обращается в ноль на поверхности, а в целом в вихревая часть скорости сравнима с потенциальной её частью в вязком подслое. Для сравнения, если у жидкости свободная поверхность, то вихревая часть относительно мала как γ .

1.4 Разделение полного течения на волновое движение и массовый транспорт

Под массовым транспортом мы понимаем медленное вихревое движение лагранжевых частиц, остающееся после усреднения по быстрым волновым ос-

цилляциям. Массовый транспорт V^L состоит из двух частей: дрейфа Стокса U^s , произведённого волновым движением, и медленно изменяющейся части эйлерова течения V . Для идеальной жидкости течение может быть полностью потенциальным и сводиться к волновому движению. Тогда медленная часть эйлеровой скорости V в точках, всегда погружённых в жидкость, оказывается равной нулю, т.е. массовый транспорт сводится к дрейфу Стокса. В случае слабо-вязкой жидкости, как мы увидим ниже, волновое движение неизбежно возбуждает медленное эйлерово течение V , так что в массовом транспорте U^s следует учитывать оба вклада. Они имеют сравнимую амплитуду в случае чистой поверхности [49]. Однако в присутствии поверхностной плёнки эйлеров вклад оказывается значительно больше, так что, наоборот, можно пренебречь вкладом от дрейфа Стокса [58].

1.4.1 Дрейф Стокса

Дрейф Стокса U^s описывает среднее по времени движение лагранжевой частицы в поле течения волны, связанное непосредственно с существованием волны. Если волна монохроматическая, то в линейном приближении по амплитуде волны лагранжева частица описывает в пространстве замкнутую траекторию в форме круга, обход которого совершается за один период колебаний. Если же учесть квадратичные поправки, то траектория перестанет быть замкнутой, поскольку в скорость частицы добавится среднее значение U^s . Будем теперь считать, что волновое движение имеет характерную частоту ω , и, для простоты, что его спектральная ширина $\Delta\omega$ мала, $\Delta\omega \ll \omega$. Важно подчеркнуть, что стоков дрейф связан исключительно с волновым движением, и, в частности, со средним импульсом, запасённым в волне:

$$\pi_\alpha(t, \mathbf{r}^\perp) = \rho \left\langle \int_{-\infty}^h dz u_\alpha(t, \mathbf{r}) \right\rangle = \rho \int_{-\infty}^0 dz U_\alpha^s(t, \mathbf{r}). \quad (1.42)$$

Здесь и далее угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают выделение медленных гармоник с частотами порядка или меньше чем $\Delta\omega$. Первое равенство в (1.42) связано с эй-

леровым описанием. Его можно переписать в виде

$$\pi_\alpha(t, \mathbf{r}^\perp) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \langle u_\alpha \theta(h - z) \rangle, \quad (1.43)$$

где $\theta(z > 0) = 1$ и $\theta(z < 0) = 0$. Вклад в интеграл (1.43) производят только те z , которые только часть времени оказывают под поверхностью жидкости, $z < h$ (а в остальную часть времени оказываются над ней, $z > h$), поскольку среднее от скорости в волне равно нулю, $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$. Эту область мы будем называть гребнево-впадинным слоем. Ограничиваясь квадратичным вкладом по амплитуде волны, следует пренебречь зависимостью скорости в этом слое. Тогда получаем, что импульс $\pi_\alpha = \langle h u_\alpha \rangle$ [9].

Дрейф Стокса существует и в идеальной жидкости. В слабо вязкой жидкости он остаётся тем же вне вязкого подслоя [10],

$$U_\alpha^{s\phi} = \left\langle \frac{\partial_\beta}{k} (\partial_\alpha \partial_t e^{kz} h) \frac{\partial_\beta}{k} (e^{kz} h) + (\partial_\alpha \partial_t e^{kz} h) (e^{kz} h) \right\rangle, \quad U_z^s = 0. \quad (1.44)$$

Для бегущей волны (1.12) стоков дрейф $U_x^s = \omega k a^2 e^{2kz}$. В вязком подслое он модифицируется за счёт вихревой компоненты скорости волны $\mathbf{u}^\psi$. Таким образом, нашей задачей здесь будет найти это изменение. Оно важно, когда измерение скорости течения в волне происходит путём наблюдения за мелкими частицами, плавающими на поверхности жидкости. Такие частицы можно считать лагранжевыми маркерами, и зависимость дрейфа Стокса внутри вязкого подслоя важна, если его толщина δ велика по сравнению с размером частиц a , $a \lesssim \delta$.

Приступим к выводу диссипативной добавки к дрейфу Стокса. Обозначим $\mathbf{R}(t)$ положение некоторого лагранжева маркера. Движение маркера определяется уравнением

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{u}(t, \mathbf{R}). \quad (1.45)$$

Амплитуда колебаний $\mathbf{R}$ по порядку величины есть h , то есть мала по сравнению с длиной волны. Поэтому разложим поле скорости около некоторой точки $\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{r}_0$ в ряд Тейлора до первого порядка по смещению:

$$u_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{r}_0) + \Sigma_{ij}(t, \mathbf{r}_0)(r_j - r_{0j}) + \dots, \quad (1.46)$$

где $\Sigma_{ij}(t, \mathbf{r}_0) = \partial_j u_i(t, \mathbf{r}_0)$ есть градиент поля скорости. Подразумевая в разложении (1.46) под смещением $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ смещение лагранжевой траектории $\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_0$,

следует, однако, иметь ввиду разную геометрическую природу потенциальной $\mathbf{u}^\phi$ и вихревой $\mathbf{u}^\psi$ частей поля скорости. Потенциальная часть зависит от координат именно так, как дано в (1.27). Однако вихревая часть связана с приповерхностным вязким подслоем, который должен отсчитываться от $z = h$, а не от невозмущённой поверхности $z = 0$. При проведении линейного анализа это обстоятельство не играет роли. Однако, поскольку дрейф Стокса квадратичен по амплитуде волны, при его вычислении смещение вязкого подслоя вместе с поверхностью должно быть учтено. Для проведения расчётов разделим градиент поля скорости волны в линейном приближении на два вклада, соответствующих (1.26), $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij}^\phi + \Sigma_{ij}^\psi$. Решаем уравнение (1.45) с точностью до второго порядка по амплитуде волны, используя итеративный метод, $\delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{R}_1 + \delta \mathbf{R}_2$. В первом порядке смещение лагранжева маркера

$$\delta \mathbf{R}_1(t) = \int_{t_0}^t dt' \mathbf{u}(t', \mathbf{r}_0), \quad (1.47)$$

Во втором порядке

$$\frac{d\delta R_{2i}(t)}{dt} = \Sigma_{ij}^\phi(t, \mathbf{r}_0) \delta R_{1j}(t) + \Sigma_{ij}^\psi(t, \mathbf{r}_0) \left(\delta R_{1j}(t) - h(t) \delta_{zj} \right). \quad (1.48)$$

Для вычисления $\delta \mathbf{R}_2$ следует удерживать только линейные по амплитуде волны вклады в $\delta \mathbf{R}_1$ and Σ_{ij} . Разность в скобке под интегралом во втором слагаемом в (1.48) есть смещение лагранжевой траектории относительно точки на поверхности с координатой $\mathbf{r}_0^\perp$. В частности, её z -компонента обращается в ноль при выборе точки на поверхности, т.е. при $z = 0$. Скорость дрейфа Стокса есть усреднённая по колебаниям волны скорость (1.48),

$$U_i^s(t) = \left\langle \Sigma_{ij}^\phi(t, \mathbf{r}_0) \delta R_{1j}(t) \right\rangle + \left\langle \Sigma_{ij}^\psi(t, \mathbf{r}_0) \left(\delta R_{1j}(t) - h(t) \delta_{zj} \right) \right\rangle. \quad (1.49)$$

Далее в вычислениях удерживаем только лидирующие вклады по γ . Согласно (1.25), смещение лагранжева маркера в первом порядке

$$R_{1\alpha} = \frac{(e^{kz} - D e^{\kappa z})}{k \left(1 - \frac{k}{\kappa} D\right)} \partial_\alpha h, \quad R_{1z} = \frac{\left(e^{kz} - \frac{k}{\kappa} D e^{\kappa z}\right)}{\left(1 - \frac{k}{\kappa} D\right)} h. \quad (1.50)$$

Величина вязкой поправки в вязком подслое к дрейфу Стокса равна

$$\begin{aligned}
 U_\alpha^s - U_\alpha^{s\phi} = & \left\langle \partial_\alpha \partial_\beta \frac{h}{k} \cdot \partial_\beta \frac{e^{\kappa z} D \partial_t h}{k} - \partial_\beta \frac{h}{k} \cdot \partial_\alpha \partial_\beta \frac{e^{\kappa z} D \partial_t h}{k} \right\rangle + \\
 & + \left\langle k h \cdot \partial_\alpha \frac{\kappa z e^{\kappa z} D \partial_t h}{k} \right\rangle + \\
 & + \left\langle \partial_\alpha \partial_\beta \frac{e^{\kappa z} D \partial_t h}{k} \cdot \partial_\beta \frac{e^{\kappa z} D h}{k} \right\rangle - \\
 & - \left\langle \partial_\alpha \frac{\kappa D e^{\kappa z} \partial_t h}{h} \cdot \frac{k D (1 - e^{\kappa z}) h}{\kappa} \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Поскольку мы описываем эйлерову часть массового переноса в терминах вертикальной компоненты завихренности, смотри ниже Пункт 1.4.2, получим также выражение для завихренности стоксового дрейфа

$$\begin{aligned}
 \varpi_z^s = & \epsilon_{\alpha\beta} \left\langle \left(e^{\hat{k}z} \partial_\alpha h \right) \left(e^{\hat{k}z} \partial_\beta \partial_t h \right) + \left(e^{\hat{k}z} \partial_\alpha \partial_\gamma \frac{h}{k} \right) \left(e^{\hat{k}z} \partial_\beta \partial_\gamma \partial_t \frac{h}{k} \right) \right\rangle + \\
 & + \left(\partial_x (U_y^s - U_y^{s\phi}) - \partial_y (U_x^s - U_x^{s\phi}) \right).
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Оценка относительной амплитуды для вязкой поправки в (1.52) (вторая строчка) есть $\sim \gamma$ для почти свободной поверхности и ~ 1 для почти несжимаемой плёнки. Явное вычисление поправки в вязком подслое при произвольном z не имеет смысла ввиду громоздкости результата с одной стороны, и его физической неинтересности с другой. Однако если производится наблюдение за движением частиц на поверхности, размер которых мал по сравнению с толщиной вязкого подслоя, то интерес представляет полный дрейф Стокса при $z = 0$:

$$\varpi_z^s = \epsilon_{\alpha\beta} \left\langle \left(\partial_\alpha h \right) \left(\partial_\beta \partial_t h \right) + \left(\partial_\alpha \partial_\gamma \frac{(1 - \hat{D})}{\hat{k}} h \right) \left(\partial_\beta \partial_\gamma \partial_t \frac{(1 - \hat{D})}{\hat{k}} h \right) \right\rangle. \tag{1.53}$$

Присутствие во втором слагаемом множителей $1 - D$ есть следствие выражения для горизонтальной скорости (1.25), взятом при $z = 0$. Если плёнка несжимаема, то второе слагаемое в (1.53) обращается в нуль. Первое же слагаемое не зависит от свойств плёнки, поскольку связано с изменением потенциальной части горизонтальной скорости с вертикальной компонентой.

Методически интересно вычислить величину, которую мы отбросили, когда в (1.48) для изменения вихревой части скорости учли только относительное смещение от поверхности. Отброшенная величина равна

$$\langle h \Sigma_{\alpha z}^\psi \rangle = \langle h \partial_z u_\alpha^\psi \rangle. \tag{1.54}$$

Отсюда видно, что источником существенного расхождения наших оценок и оценок, сделанных в [111], является большой градиент ($\sim 1/\delta$) вихревой части поля скорости u^ψ по вертикали. Если не учитывать лагранжев перенос этого поля вместе с границей в вертикальном направлении, то большой множитель $1/\delta$ оказывается нескомпенсированным. Учёт же переноса u^ψ вместе с границей приводит к появлению разности $(\delta R_{1z} - h) \sim \delta$ в (1.49), которая и компенсирует большой градиент. Далее, используя (1.28, 1.30), находим, что z -компонента ротора от выражения (1.54) есть:

$$\epsilon_{\beta\alpha} \partial_\beta \langle h \partial_z u_\alpha^\psi \rangle = -\langle \varpi_\alpha \partial_\alpha h \rangle \equiv -\langle \varpi_z^{(r)} \rangle. \quad (1.55)$$

Величина $\langle \varpi_z^{(r)} \rangle$ по своему геометрическому смыслу есть средняя величина z -компоненты завихренности, которая формально получается, если учесть, что вязкий подслой локально расположен не горизонтально, а под наклоном вслед за поверхностью. Таким образом, учитывая вертикальное смещение вязкого подслоя, нам следует учитывать и его наклон. Отметим, что других аналогичных поправок, которые нам следовало бы учесть, нет. Например, учёт конечной кривизны подслоя дал бы более высокие порядки по малой крутизне волн и потому производиться не должен.

1.4.2 Массовый транспорт

Рассмотрим несжимаемое течение с поверхностью, покрытой плёнкой, которое можно представить как наложение поверхностных волн и медленного течения. Волновое течение по-прежнему имеет характерную частоту ω и малую спектральную ширину $\Delta\omega \ll \omega$.

Далее, обозначим посредством V поле скорости медленного вихревого течения, которое не включает в себя медленное потенциальное течение порождённое нелинейным взаимодействием волн (его амплитуда мала как $\Delta\omega$, смотри работу [112]). Полное поле скорости жидкости

$$v = u + V. \quad (1.56)$$

Характерное время T , за которое изменяется медленное течение V , велико по сравнению с периодом колебания волны, $\omega T \gg 1$. Что касается характерного

пространственного масштаба L медленного течения V , то он не предполагается обязательно превышающим длину волны, а может быть и равен ей, смотри например [49]; медленность течения требует, однако, чтобы градиент вихревой части поля скорости был мал, $V/L \ll \omega$. Она же в общем случае также требует, чтобы поверхность жидкости оставалась почти ровной, если не возбуждены поверхностные волны. Критерием этого является малость числа Фруде для медленного течения, $Fr = V^2/(gL) \ll 1$.

Наша цель состоит в определении влияния волнового движения на медленное течение V . Имеются два существенно различных вклада в этот эффект. Первый вклад обязан своим существованием ненулевой вязкости жидкости и/или обрушениям волны и потому отсутствует в идеальной жидкости без обрушений. Он возбуждает медленное вихревое течение, даже если в начальный момент времени оно отсутствовало — в идеальной жидкости без обрушений такого не может быть в силу теоремы Кельвина, смотри например [113]. В вязкой жидкости волна затухает, а импульс, связанный с волной, передаётся вихревому медленному течению. Передача импульса происходит в узком слое, который включает в себя вязкий подслой и искривлённую волной поверхность. С точки зрения медленного течения этот слой можно считать бесконечно тонким, то есть считать, что со стороны волн к поверхности приложено касательное напряжение τ , называемое виртуальным волновым напряжением (virtual wave stress) [75; 76]. Это приближение визуализирует Рисунок 1.2. Математически, существование виртуального поверхностного напряжения означает, что касательными граничными условиями для медленного течения V являются

$$\rho\nu\partial_z V_\alpha = \tau_\alpha \quad (1.57)$$

в приближении $V_z = 0$. Напряжение τ имеет второй порядок по амплитуде волны h , и потому изменяется на временах $1/\Delta\omega$. Для свободной поверхности амплитуда напряжения может быть оценена как скорость затухания волны νk^2 , помноженная на поверхностную плотность импульса в бегущей волне $|\pi| = \rho\omega\langle h^2 \rangle$ (поверхностная плотность импульса равна дрейфу Стокса, проинтегрированному по глубине и помноженному на плотность жидкости ρ , см [76]), то есть $|\tau| \sim \nu k^2 |\pi|$. Уравнение на завихренность (1.9) в данном случае можно интерпретировать следующим образом: виртуальное волновое напряжение генерирует z -компоненту завихренности на поверхности, которая затем благодаря вязкости диффузионным образом

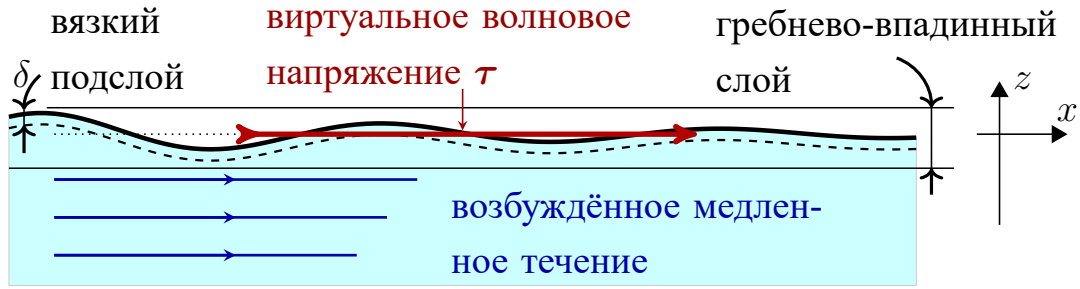


Рисунок 1.2 — Схематическое изображение генерации медленного вихревого течения бегущей волной в слабо вязкой жидкости.

распространяется вглубь жидкости [7; 59]. Естественно ожидать, что, поскольку плёнка увеличивает скорость затухания волны, то она же даёт увеличение и амплитуды виртуального волнового напряжения $|\tau|$. Эта глава посвящена всестороннему исследованию этого эффекта.

Второй канал влияния волнового движения на медленное вихревое течение не связан с вязкостью или обрушением, и потому реализуется в том числе и в идеальной жидкости. А именно, волна через дрейф Стокса, скорость которого обозначим U^s , действует на вихревое течение, развивая так называемую вихревую силу (vortex force) [10; 12]

$$\mathbf{f}^V = \rho[\mathbf{U}^s \times \text{rot } \mathbf{V}] \quad (1.58)$$

Сила (1.58) локализована в области проникновения волнового движения, то есть на глубине $\sim 1/k$. В частности, существование силы при определённых условиях приводит к так называемой циркуляции Ленгмюра [10]. Мы исследуем предел слабых вихревых течений, когда не зависящее от амплитуды течения $\mathbf{V}$ виртуальное волновое напряжение τ производит бóльший эффект по сравнению с вихровой силой (1.58).

Поскольку поле скорости медленного вихревого течения $\mathbf{V}$ также бездивергентно, $\text{div } \mathbf{V} = 0$, оно может быть параметризовано двумя скалярными функциями. Предполагая, что течение ограничено по горизонтали, в качестве этих двух функций удобно выбрать z -компоненты завихренности и самой скорости, $\varpi_z^V = \partial_x V_y - \partial_y V_x$ и V_z . В силу малости числа Фруде вертикальная скорость на поверхности должна быть принята равной нулю, $V_z|_{z=0} = 0$. Следовательно, поскольку возбуждение волнами вихревого течения происходит вблизи поверхности, то возбуждённое течение полностью описывается компонентой ϖ_z^V , на которую на поверхности не наложено ограничений. Если же волновое движение

есть плоская бегущая волна, то этот случай технически удобнее рассматривать отдельно.

В эксперименте измерение течения производится путём видео-регистрации частичек, плавающих на поверхности или в объёме. Чаще всего они подсвечиваются лазерным листом — плоским пучком света. В результате измеряется не эйлерова скорость v — т.е. скорость в фиксированной точке пространства, — а лагранжева скорость v_L . Если бы экспериментальные измерения производились с разрешением по времени, на много меньше периода, и разрешением по пространству, на много меньше амплитуды колебаний волны, то эти две величины совпадали бы. Однако пространственное разрешение при регистрации частичек поперёк лазерного листа обычно намного больше амплитуды колебаний волны. Если цель состоит в измерении вихревого медленного течения, то приходится делать усреднение по нескольким периодам колебаний волн. В этом случае фиксируемая лагранжева скорость, которая также называется скоростью массового переноса (mass transport velocity). Она равна сумме эйлеровой скорости вихревого течения и скорости дрейфа Стокса в волновом поле

$$\mathbf{V}^L = \mathbf{V} + \mathbf{U}^s, \quad \varpi_z^L = \varpi_z^V + \varpi_z^s. \quad (1.59)$$

Поправка от дрейфа Стокса оказывается важной, например, для случая свободной поверхности [49], где она сравнима с эйлеровой частью скорости.

1.4.3 Выводы

Обсудим полученный нами результат для дрейфа Стокса (1.51). Если поверхность жидкости свободна, то $D \sim \gamma$, так что амплитуда вязкой поправки (1.51) мала как γ по сравнению с амплитудой самого дрейфа Стокса (1.44). В работе [111] был получен результат, отличающийся от (1.51), согласно которому вязкая поправка обращает полный дрейф в ноль на самой поверхности в случае отсутствия плёнки. Источник отличия в том, что в этой работе не был учтён вертикальный перенос вязкого подслоя вместе с поверхностью.

Далее, относительная величина вязкой поправки оказывается порядка единицы в вязком подслое, когда плёнка становится почти несжимаемой, так что

$D \sim 1$. Из проведённых оценок следует, что относительная величина вклада вязкого подслоя в интеграл по вертикали (1.42) составляет не более $\sim \gamma$, а для свободной поверхности она порядка $\sim \gamma^2$.

1.5 Влияние плёнки на массовый транспорт

Прежде чем провести исследование для плёнки с произвольным модулем упругого сжатия в Пункте 1.5.2, рассмотрим предельный случай почти несжимаемой плёнки в Пунктах 1.3.4, 1.5.1. Это позволит в ходе аналитических выводов сконцентрироваться на главных моментах теории, избежав излишней громоздкости формул. Изложение для несжимаемой плёнки частично построено на работе автора [57], для несжимаемой плёнки — на работе автора [58]. Предельный случай свободной поверхности был рассмотрен в [49].

1.5.1 Возбуждение вихревого течения в случае несжимаемой плёнки

Механизм генерации вертикальной завихренности медленного течения аналогичен тому, который до этого был исследован в случае жидкости со свободной поверхностью [49]. Отметим, что в граничное условие на завихренность (1.10) не входит поверхностное натяжение, и потому нам не требуется учитывать квадратичные по ∇h поправки в δn . В общем уравнении на завихренность (1.9) следует удерживать линейные вклады по V и квадратичные вклады по амплитуде волны h (при этом перекрёстные вклады следует выкинуть). Как было обсуждено выше, нас интересует z -компонента этого уравнения:

$$(\partial_z^2 - \hat{\kappa}^2)\varpi_z^V = -\nu^{-1}\langle \varpi_\alpha \partial_\alpha u_z \rangle, \quad (1.60)$$

где правая часть определяется (1.40, 1.41). В правой части мы поставили знак усреднения по быстрым волновым осцилляциям, так что в левой части уравнения оценкой для оператора $\hat{\kappa}^2$ является $\max(\Delta\omega/\nu, k^2)$. Иными словами, $\delta^2 \hat{\kappa}^2 \ll 1$. Граничные условия суть i) (1.10), написанное также в линейном по V и квадра-

тичном по h приближении, и налагаемое при $z = 0$,

$$\partial_z \varpi_z^V = (\partial_z \varpi_\alpha)(\partial_\alpha h) - \epsilon_{\alpha\gamma}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)\partial_\beta \partial_\gamma h, \quad (1.61)$$

и ii) $\varpi_z^V \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$.

Сперва выделим в ϖ_z^V вклад $\langle \varpi_z^{(r)} \rangle = \langle \varpi_\alpha \partial_\alpha h \rangle$ (1.55), который соответствует повороту завихренности вследствие поворота поверхности. Этот вклад быстро меняется по вертикали (на масштабе γ/k), поэтому в главном порядке по γ уравнение (1.60) сводится к

$$\partial_z^2 \varpi_z^V = -\nu^{-1} \langle \varpi_\alpha \partial_t \partial_\alpha h \rangle = \langle (\kappa^2 \varpi_\alpha) \partial_\alpha h \rangle = \partial_z^2 \langle \varpi_\alpha \partial_\alpha h \rangle. \quad (1.62)$$

Решением этого уравнения с граничным условием $\varpi_z^V \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ является

$$\varpi_z^V = \varpi_\alpha \partial_\alpha h, \quad \partial_z \varpi_z^V = (\partial_z \varpi_\alpha) \partial_\alpha h. \quad (1.63)$$

Таким образом, выделенный вклад в ϖ_z^V действительно соответствует повороту завихренности наклоном поверхности. Его производная на поверхности $\partial_z \varpi_z^V$ в точности равна первому слагаемому в граничном условии (1.61). Так и должно быть: ненулевой вклад в $l_m l_k \partial_k \varpi_m$ в уравнении (1.10), квадратичный по амплитуде волны, учитывает то, что поверхность имеет наклон при неизменно горизонтальном расположении вязкого подслоя. Если же учесть наклон и вязкого подслоя, то этот вклад обратится в нуль.

Вычтем часть $\langle \varpi_z^{(r)} \rangle$ (1.55) из ϖ_z^V и удержим вклад следующего порядка по γ в уравнениях (1.60, 1.61), который и представляет физический интерес. Нам надо решить следующую задачу (чтобы избежать нового обозначения, будем использовать то же ϖ_z^V):

$$(\partial_z^2 - \hat{\kappa}^2) \varpi_z^V = \nu^{-1} \langle \varpi_\alpha \partial_\alpha (\partial_t h - u_z) \rangle, \quad \partial_z \varpi_z^V = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, -\infty. \quad (1.64)$$

При написании граничного условия мы учли, что второе слагаемое в правой части (1.61) для несжимаемой плёнки равно нулю. Отметим, что в правой части (1.64) содержится временная производная от относительного вертикального смещения, которое уже было введено в (1.48) при вычислении дрейфа Стокса. Поскольку, напомним, оператор $\hat{\kappa}$, стоящий слева в уравнении (1.64), мал в смысле $\hat{\kappa} \delta \ll 1$, то источник в правой части можно считать сконцентрированным на поверхности. В этом пределе задача переписывается в виде

$$(\partial_z^2 - \hat{\kappa}^2) \varpi_z^V = 0, \quad \partial_z \varpi_z^V \Big|_{z=0} = f^\varpi, \quad (1.65)$$

где амплитуда источника

$$f^\varpi = \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{\nu} \langle \varpi_\alpha \partial_\alpha (u_z - \partial_t h) \rangle. \quad (1.66)$$

Граничное условие (1.65) с источником f^ϖ означает, что f^ϖ есть ротор от касательного напряжения τ , приложенного к поверхности жидкости:

$$f^\varpi = \frac{1}{\nu \rho} (\partial_x \tau_y - \partial_y \tau_x). \quad (1.67)$$

Таким образом, здесь мы аналитически обосновали задекларированную в Пункте 1.4.2 концепцию виртуального поверхностного напряжения τ . Решением уравнения (1.65) является

$$\varpi_z^V(z) = \frac{1}{\hat{\kappa}} e^{\hat{\kappa} z} f^\varpi. \quad (1.68)$$

Подчеркнём, что выражение (1.68) применимо в том числе и в вязком подслое как непрерывное продолжение полученного решения вне вязкого слоя. То, что точное решение не имеет скачков в вязком подслое можно понять, формально точно решив исходное уравнение (1.64).

Вычисление интеграла f^ϖ (1.66) требует отдельного внимания. Для удержания только главного порядка по γ мы должны пользоваться приближениями точных соотношений (1.39, 1.40, 1.41):

$$\varpi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\beta \kappa e^{\kappa z} \frac{\partial_t h}{k}, \quad u_z - \partial_t h = -zk \partial_t h + \nu \kappa (1 - e^{\kappa z}) k h, \quad \frac{\partial_t}{\nu} = \kappa^2. \quad (1.69)$$

Теперь вычислим интеграл в (1.66):

$$f^\varpi = \epsilon_{\alpha\beta} \left\langle (\partial_\alpha \hat{k} h) \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}} \partial_\beta \partial_t h + (\partial_\beta \partial_t \hat{k}^{-1} h) (\hat{\kappa} \hat{k} \partial_\alpha h) - \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \frac{\partial_{\beta_1} \partial_{t_1} h_1}{k_1} k_2 \partial_{\alpha_2} h_2 \right\rangle. \quad (1.70)$$

В последнем слагаемом нижние индексы '1' и '2' обозначают зависимость от координат $\{t_1, x_1, y_1\}$ и $\{t_2, x_2, y_2\}$, которые после проведения всех вычислений полагаются равными $\{t, x, y\}$. Первая дробь в последнем слагаемом

$$\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} - \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2(\kappa_1 + \kappa_2)} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} - \frac{\partial_t}{2\nu(\kappa_1 + \kappa_2)}. \quad (1.71)$$

Производная ∂_t действует на всё выражение, а, поскольку после этого результат усредняется по времени, то вклад второго слагаемого в (1.71) в окончательный ответ равен нулю. Сам окончательный ответ есть

$$\varpi_z^V(t, \mathbf{r}) = \frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{2} \frac{e^{\hat{\kappa} z}}{\hat{\kappa}} \left\langle (\hat{\kappa} \hat{k} \partial_\alpha h) (\partial_\beta \partial_t \hat{k}^{-1} h) + (\partial_\alpha \hat{k} h) \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}} \partial_\beta \partial_t h \right\rangle. \quad (1.72)$$

Экспонента $\exp(\hat{k}z)$ действует на квадратичную форму от h , которая содержит в том числе и малые частоты $\sim \Delta\omega$. Поэтому этот вклад распространяется на глубину $\sim \sqrt{\nu/\Delta\omega}$, если разброс частот в волновом движении велик относительно скорости вязкой релаксации на соответствующем волновом векторе q . Если же волновое движение почти монохроматическое, так что $\Delta\omega \ll \nu q^2$, то глубина проникновения этого вклада есть $1/q$.

Рассмотрим более подробно случай монохроматического волнового движения, когда абсолютное значение волнового вектора фиксировано, $\hat{k}h = kh$. На поверхности жидкости значение постоянного во времени вклада в завихренность имеет вид:

$$\varpi_z^V|_{z=0} = \epsilon_{\alpha\beta} \hat{k}^{-1} \left\langle (\hat{k} \partial_\alpha h) (\partial_\beta \partial_t h) \right\rangle. \quad (1.73)$$

Для того, чтобы проиллюстрировать соотношение (1.73), рассмотрим две волны, распространяющиеся ортогонально друг другу. Для таких волн форма поверхности задаётся в виде

$$h = H_1 \cos(\omega t - kx) + H_2 \cos(\omega t - ky). \quad (1.74)$$

Подставляя (1.74) в выражение (1.73), получаем

$$\varpi_z^V|_{z=0} = -\frac{1}{\sqrt{2}\gamma} H_1 H_2 \omega k^2 \sin(kx - ky). \quad (1.75)$$

1.5.2 Плёнка с конечной сжимаемостью

Для плёнки с конечной сжимаемостью применим тот же вывод по извлечению нефизической поправки $\langle \varpi_z^{(r)} \rangle$, приведший к (1.64). Таким образом, по-прежнему нам надо решить уравнение в объёме (1.64) с поправкой на то, что теперь второе слагаемое в граничном условии на завихренность (1.61) нулю не равно:

$$\partial_z \varpi_z^V = -\epsilon_{\alpha\gamma} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) \partial_\beta \partial_\gamma h \quad \text{at} \quad z = 0. \quad (1.76)$$

Таким образом, источник f^ϖ , введённый в (1.65), теперь имеет вид

$$f^\varpi = \left\langle -\epsilon_{\alpha\gamma} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)|_{z=0} \partial_\beta \partial_\gamma h + \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{\nu} \varpi_\alpha \partial_\alpha (u_z - \partial_t h) \right\rangle \quad (1.77)$$

при неизменном виде (1.68) ответа для завихренности. Далее, вместо приближённых выражений (1.69) теперь следует использовать

$$\varpi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\beta \hat{D} \hat{\kappa} e^{\hat{\kappa}z} \frac{\partial_t}{\hat{k}} h, \quad u_z - \partial_t h = -z \hat{k} \partial_t h + \nu \hat{D} \hat{\kappa} (1 - e^{\hat{\kappa}z}) \hat{k} h, \quad (1.78)$$

$$\text{and} \quad \partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha = 2(1 - \hat{D}) \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial_t}{\hat{k}} h \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (1.79)$$

согласно (1.25, 1.30). После подстановки (1.78, 1.79) в (1.77) приходится провести вычисления, аналогичные вычислениям (1.70, 1.71). На этот раз вычисления оказываются только несколько более громоздкими.

Окончательным выражением для эйлеровой части завихренности является

$$\begin{aligned} \varpi_z^V = & \epsilon_{\alpha\beta} \frac{e^{\hat{\kappa}z}}{\hat{\kappa}} \left(2(\partial_\alpha \partial_\gamma h) \left(\partial_\beta \partial_\gamma \partial_t \frac{(1 - \hat{D})h}{\hat{k}} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\partial_\beta \partial_t \frac{\hat{D} \hat{\kappa}}{\hat{k}} h \right) \left(\partial_\alpha \left(1 - \frac{\hat{D}}{2} \right) \hat{k} h \right) + \left(\partial_\beta \partial_t \frac{\hat{D}}{2 \hat{k}} h \right) (\partial_\alpha \hat{D} \hat{\kappa} \hat{k} h) \right). \end{aligned} \quad (1.80)$$

Отметим, что присутствие второй пространственной производной от h , $\partial_\alpha \partial_\gamma h$, в правой части (1.80) означает, что соответствующий вклад определяется кривизной поверхности. Для плёнки с существенным модулем сжатия, для которой $\hat{D} \gg \gamma$, этот вклад оказывается параметрически малым и должен быть опущен. Если плёнка несжимаема, $\hat{D} = 1$, то мы приходим к уже полученному выше результату (1.72). Если поверхность свободная, $\hat{D} = 2\hat{k}/\hat{\kappa}$, то

$$\varpi_z^V = 2\epsilon_{\alpha\beta} \frac{e^{\hat{\kappa}z}}{\hat{\kappa}} \left((\partial_\alpha \partial_\gamma h) \left(\partial_\beta \partial_\gamma \partial_t \frac{1}{\hat{k}} h \right) + (\partial_\alpha \hat{k} h) (\partial_\beta \partial_t h) \right), \quad (1.81)$$

что совпадает с ранее полученным ответом [49] с точностью до исключённого в нашем изложении вклада $\langle \varpi_z^{(r)} \rangle$. В общем же случае, если немонахроматичностью волнового движения можно пренебречь, то (1.80) упрощается до вида

$$\varpi_z^V = \epsilon_{\alpha\beta} \frac{e^{\hat{\kappa}z}}{\hat{\kappa}} \left(\frac{2}{\hat{k}} (\partial_\alpha \partial_\gamma h) (\partial_\beta \partial_\gamma \partial_t h) + (\partial_\alpha h) (\partial_\beta \partial_t D \kappa h) \right). \quad (1.82)$$

В первом слагаемом мы заменили $(1 - D) \rightarrow 1$, поскольку когда D становится порядка единицы, второе слагаемое становится параметрически большим, так что всё первое слагаемое должно быть опущено. Мы можем продвинуться дальше, выразив комплексный параметр D в (1.82) через действительный параметр ε . Для этого установим сначала, что мнимая часть оператора

$$\text{Im}(\hat{D} \hat{\kappa} \partial_t) = 2k \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{2}\gamma(\varepsilon^2 - \sqrt{2}\varepsilon + 1)} \right) \partial_t. \quad (1.83)$$

Действительная часть этого оператора не вносит вклада в окончательный ответ (1.82) вследствие присутствия антисимметричного оператора $\epsilon_{\alpha\beta}$. Таким образом, сама завихренность

$$\begin{aligned} \varpi_z^V = 2k \frac{e^{\hat{k}z}}{\hat{k}} \epsilon_{\alpha\beta} & \left(\partial_\alpha \partial_\gamma \frac{h}{k} \partial_\beta \partial_\gamma \partial_t \frac{h}{k} + \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{2}\gamma(\varepsilon^2 - \sqrt{2}\varepsilon + 1)} \right) \partial_\alpha h \partial_t \partial_\beta h \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Если в этом выражении устремить $\varepsilon \rightarrow \infty$ и удержать только главные вклады по $1/\gamma$, то мы придём к уже полученным в предыдущем Пункте выражению для завихренности в случае несжимаемой плёнки (1.75).

Скорость дрейфа Стокса составляет существенную часть в завихренности скорости массового транспорта (лагранжевой завихренности) ϖ_z^L (1.59), если поверхность почти свободная, когда $D \sim \gamma$. При этом в скорости дрейфа следует удержать только вклад (1.44) от потенциальной части скорости волны, поскольку поправка от вихревой составляющей (1.51) мала как γ . Используя (1.52) получаем, что в случае свободной поверхности

$$\begin{aligned} \varpi_z^L = 2\epsilon_{\alpha\beta} \frac{e^{\hat{k}z}}{\hat{k}} & \left((\partial_\alpha \partial_\gamma h) \left(\partial_\beta \partial_\gamma \partial_t \frac{h}{k} \right) + (\partial_\alpha \hat{k} h) (\partial_\beta \partial_t h) \right) + \\ & + \epsilon_{\alpha\beta} \left(\left(e^{\hat{k}z} \partial_\alpha \partial_\gamma \frac{h}{k} \right) \left(e^{\hat{k}z} \partial_\beta \partial_\gamma \partial_t \frac{h}{k} \right) + \left(e^{\hat{k}z} \partial_\alpha h \right) \left(e^{\hat{k}z} \partial_\beta \partial_t h \right) \right) \end{aligned} \quad (1.85)$$

Например, для двух монохроматических бегущих волн (1.74), распространяющихся в ортогональных направлениях, выражение (1.85) даёт на чистой поверхности

$$\varpi_z^L = -(\sqrt{2} + 1) k^2 H_1 H_2 \omega \sin(k(x - y)), \quad (1.86)$$

что также совпадает с ответом полученным в [49] с учётом поправок, данных в [57]. В (1.86) первый вклад, пропорциональный $\sqrt{2}$, — эйлеров, а второй, пропорциональный 1 — стоксов. Если же наличие плёнки существенно, так что $D \gg \gamma$, то вклад дрейфа Стокса в массовый транспорт оказывается несущественным, так что (1.80) есть ответ и для ϖ_z^L .

1.5.3 Выводы

Главным результатом этого Пункта является зависимость (1.84) в круглой скобе. Она показывает, что наличие плёнки при той же амплитуде волнового движения может увеличить амплитуду медленного вихревого течения в $\sim 1/\gamma$ раз. В пределе $\gamma \ll 1$ максимум увеличения достигается при значении $\varepsilon = \sqrt{2}$ безразмерного модуля упругости (1.22). Этот максимум соответствует максимуму затухания волны, смотри выражение (1.35) и Рисунок 1.1б. Так и должно быть, поскольку возбуждение эйлеровой части массового транспорта происходит благодаря затуханию волн.

Отметим также, что эйлерово движение имеет инерцию. Его отклик не является потому мгновенным. В уравнении (1.84), связывающем завихренность медленного течения с волновым движением, запаздывающую реакцию обеспечивает операторный множитель $\hat{\kappa}^{-1}e^{\hat{\kappa}z}$, стоящий перед всем выражением.

Дрейф Стокса не связан с диссипативными процессами в волне. Он определяется одним периодом волнового движения и потому имеет мгновенный отклик с точки зрения динамики медленного течения. Амплитуда дрейфа Стокса (1.52) не зависит от свойств плёнки в глубине жидкости, то есть ниже вязкого подслоя. Дрейф Стокса оказывается сравнимым с амплитудой медленного течения при достижении его стационарного значения, если поверхность является почти свободной, то есть плёнка отсутствует (смотри Таблицу 1). Поскольку в эксперименте измеряется массовый транспорт, т.е. лагранжева скорость, смотри Пункт 1.4.2 и выражение (1.59), то в пределе свободной поверхности дрейф Стокса должен быть учтён.

Если же модуль упругого сжатия плёнки существенен, $\varepsilon \gg \sqrt{\gamma}$, смотри Таблицу 1, то дрейф Стокса оказывается параметрически меньше, чем эйлерово течение в его стационарном значении. Поэтому дрейф Стокса оказывается несущественным, если эйлерово течение по времени вышло несущественным. Стоксов дрейф следует учитывать только в переходных режимах, пока эйлерово течение остаётся намного меньше своего асимптотического по времени значения. И здесь оказывается важным то, что поле скорости в волне существенно изменяется в вязком подслое в присутствии плёнки. Если частички, с помощью которых происходит визуализация течения, имеют размер меньше толщины вяз-

кого подслоя, то стоков дрейф следует вычислять на поверхности жидкости, где он существенно зависит от свойств плёнки, смотри выражение (1.53).

Для случая произвольной плёнки в работах автора данной диссертации [57; 58] также не производился отсчёт вертикальной координаты от поверхности жидкости для вычисления вихревой части скорости в линейной волне. В этой части методология работ [57; 58] соответствует работе [111], в которой получен некорректный результат для величины массового транспорта в вязком подслое. Однако в работах [57; 58] одновременно был учтен вклад в эйлерову завихренность $\langle \varpi_z^{(r)} \rangle$, смотри уравнение (1.63) и обсуждение после него. Время отклика вклада в завихренность $\langle \varpi_z^{(r)} \rangle$ на волновое движение порядка периода колебания волны, то есть этот вклад по свойствам идентичен дрейфу Стокса. В результате полная лагранжева завихренность ϖ_z^L в вязком подслое имела такой же вид, как и представленный в данной диссертации. Метод получения величины массового транспорта, представленный в данной диссертации, представляется более предпочтительным с той точки зрения, что он не вызывает необходимости непосредственно рассчитывать виртуальные вклады в дрейф Стокса и эйлерову скорость, которые затем тождественно сокращают друг друга в выражении для лагранжевой скорости.

1.6 Генерация вихревого течения двумя волнами, распространяющимися под прямым углом друг к другу

Отталкиваясь от экспериментальных исследований генерации вихревого течения в квадратной ячейке стоячими поверхностными волнами [49; 85], нами был рассмотрен случай, когда на поверхности возбуждаются две монохроматические стоячие ортогональные друг другу волны. Предполагается, что амплитуды волн меняются, так цель состоит в исследовании динамического отклика вихревого медленного течения.

Если у декартовой системы координат $Oxyz$ горизонтальные оси Ox и Oy направлены вдоль сторон ячейки, то форма поверхности $h(t, x, y)$ для установившегося волнового движения задаётся выражением

$$h(t, x, y) = H_1 \cos(\omega t) \cos(kx) + H_2 \cos(\omega t + \psi) \cos(ky), \quad (1.87)$$

где H_1 и H_2 суть амплитуды волны, а ψ — сдвиг фазы между волнами. Вязко-нелинейное взаимодействие волн приводит к возбуждению медленного течения в форме регулярной решётки вихрей, период которой определяется периодом волны. Согласно (1.59), в установившемся режиме регистрируется лагранжева завихренность, равная сумме эйлеровой завихренности (1.80) и стоксовой завихренности (1.52, 1.53). Амплитуда лагранжевого движения равна

$$\varpi_z^L = \left(\frac{\varepsilon^2 e^{kz\sqrt{2}}}{2\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{2}e^{kz\sqrt{2}} + e^{2kz} \right) \Lambda(x, y), \quad (1.88)$$

$$\Lambda(x, y) = -H_1 H_2 \omega k^2 \sin(kx) \sin(ky) \sin \psi. \quad (1.89)$$

Второе и третье слагаемое должны быть опущены как малые поправки, если в первом слагаемом $\varepsilon \sim 1$. Третье слагаемое, содержащее $\exp(2kz)$, есть дрейф Стокса (1.52, 1.53), в котором ненулевым оказывается только первое слагаемое вследствие ортогональности волн.

Поскольку плёнка является результатом неконтролируемого загрязнения поверхности, то имеется вопрос об экспериментальном определении значения безразмерного модуля упругости плёнки ε . Построенная теория даёт два независимых способа его определения. Первый способ основан на соотношении (1.36) между амплитудами горизонтальной и вертикальной скоростей в волне. Второй способ состоит в измерении скорости затухания волны $1/\tau$. Выражение (1.35), однако, требует корректировки для ячейки конечного размера. Дело в том, что трение волнового течения происходит также и на боковых стенках. Мы будем считать, что ячейка имеет квадратную форму размером $L \times L$. Тогда безразмерная скорость затухания волны (обратная добротность)

$$\frac{1}{\omega\tau} = 2\gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma k L \sqrt{2}} \right) + \frac{\gamma}{2\sqrt{2}} \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)}. \quad (1.90)$$

В (1.90) член, содержащий L , учитывает диссипацию в вязком пограничном слое [2, §24] у боков сосуда.

1.6.1 Процесс установления вихревого течения

Предполагается следующая экспериментальная реализация. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость покоится. По бокам ячейки в воду полу-опущены

плунжеры (горизонтально расположенные палки специального поперечного сечения), которые под действием крепежа сверху начинают колебаться с частотой ω в момент $t = 0$. Частота колебаний плунжеров близка к резонансной частоте, которая определяется условием, что от края до края ячейки укладывается полуцелое количество волн, $kL/\pi \in \mathbb{N}$. Близость к резонансу означает, что в волновом движении доминируют резонансные волны, а вкладами всех остальных можно пренебречь. Экспериментально наблюдаемыми величинами являются, таким образом, амплитуды возбуждённых стоячих волн $H_{1,2}(t)$ и разность фаз между ними $\psi(t)$. Эти параметры являются медленно меняющимися за одно колебание.

Дрейф Стокса определяется одним периодом колебаний волны, поэтому с точки зрения динамики амплитуд и фаз волн он мгновенно отслеживает их изменения. Таким образом, в выражении (1.88) третье слагаемое остаётся неизменным, надо только заменить статическое $\Lambda(x, y)$ на меняющееся

$$\Lambda(t, x, y) = -H_1(t)H_2(t)\omega k^2 \sin(kx) \sin(ky) \sin \psi(t). \quad (1.91)$$

Динамика амплитуда дрейфа Стокса определяется скоростью затухания волны (1.90), характерное время его изменения может быть оценено как в два раза меньшее, $t_s = \tau/2$, поскольку эффект квадратичен по амплитуде волны.

Наоборот, эйлеров вклад в завихренность имеет диффузионную динамику с характерным временем $1/\nu k^2$. Для его определения нам необходимо сперва подставить форму поверхности (1.87) в общее выражение (1.77, 1.82) для амплитуды эффективного источника завихренности на поверхности:

$$f^\varpi = kF \cdot \Lambda(t, x, y), \quad F = 2 + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)}. \quad (1.92)$$

После этого должна быть решена нестационарная задача (1.65). Иными словами, нам нужно расписать явно записанное ранее формально решение (1.68) в виде, пригодном для сравнения с экспериментально измеренным вихревым течением. Характерным временем изменения эйлерова вклада в завихренность является $t_E = l^2/\nu$, где обратное волновое число решётки вихрей $l = 1/\sqrt{2}k$. Оно, подчеркнём, не зависит ни от свойств плёнки, ни от размера бассейна, поскольку определяет динамику течения в объёме.

Для того, чтобы решить уравнение (1.65), продолжим его симметрично на полупространство $z > 0$ с тем, чтобы определить Фурье-образ

$$\tilde{\varpi}_z^V(t, x, y, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \varpi_z^V(t, x, y, z) e^{-iqz}, \quad (1.93)$$

Уравнение с граничным условием (1.65) эквивалентно уравнению с источником на всей прямой $-\infty < z < \infty$,

$$\frac{1}{\nu} \partial_t \varpi_z^V - \Delta \varpi_z^V = 2k\delta(z)F\Lambda, \quad (1.94)$$

Начальным условием является $\tilde{\varpi}_z^V(x, y, q, 0) = 0$. Отметим, что ϖ_z^V наследует пространственную зависимость Λ (1.91) в плоскости Oxy , поэтому в (1.94) следует сделать замену $\partial_x^2 + \partial_y^2 = -2/l^2$. В Фурье-пространстве уравнение (1.94) имеет вид

$$\frac{1}{\nu} \partial_t \tilde{\varpi}_z^V + (l^{-2} + q^2) \tilde{\varpi}_z^V = 2F\Lambda(t, x, y) \quad (1.95)$$

Решением уравнения (1.95) является

$$\tilde{\varpi}_z^V(t, x, y, q) = 2kF \int_0^t dt' e^{-(1+\xi^2)(t-t')/t_E} \Lambda(t', x, y). \quad (1.96)$$

Если поверхность свободная и ячейка достаточно велика, то время затухания волны того же порядка, что и время динамики завихренности, $t_s \sim t_E$. Однако, если ячейка имеет достаточно ограниченный размер и/или на поверхности присутствует плёнка, то возможна реализация предела $t_s \ll t_E$. Этот предел как раз имеет место в нашей работе [59]. Тогда разумно рассмотреть модель, в которой источник f^ϖ в уравнении на эйлерову завихренность ϖ_z^V (1.65) не зависит от времени при $t > 0$, будучи равным своему асимптотическому значению при $t \gg t_s$. Итак, примем, что Λ не зависит от времени, и совершим обратное преобразование Фурье. Получим

$$\varpi_z^V(t, x, y, z) = \frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \Lambda(x, y) \int_0^{t/t_E} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi\xi}} \exp\left(-\xi - \frac{(z/l)^2}{4\xi}\right). \quad (1.97)$$

Можно убедиться, что асимптотическое на больших временах $t/t_E \gg 1$ значение выражения (1.97) совпадает с первыми двумя слагаемыми в (1.88) с учётом определений (1.89, 1.92).

Отдельный интерес представляет значение завихренности на поверхности, поскольку оно является легче всего измеримым. Подставляя $z = 0$ в выражение (A.4), получаем

$$\varpi_z^V(t, x, y, 0) = \frac{F}{\sqrt{2}} \Lambda(x, y) \cdot \text{Erf}(\sqrt{t/t_E}), \quad (1.98)$$

где функция ошибок $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\zeta e^{-\zeta^2}$. В частности, на начальной стадии установления, $t \ll t_E$, завихренность растёт корневым образом со временем, $\varpi_z^V \propto \sqrt{t/t_E}$.

1.6.2 Процесс затухания вихревого течения

Теперь рассмотрим экспериментальную ситуацию, когда после долгого процесса установления в течении многих времён t_E плунжеры прекращают возбуждать волну в момент времени $t^* \gg t_E$. По прежнему считая скорость затухания волн большой по сравнению со скоростью установления эйлеровой завихренности, $t_s \ll t_E$, опишем, как будет затухать со временем ϖ_z^V .

В такой постановке начальным условием является

$$\varpi_z^V(x, y, z, t^*) = \frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \Lambda(x, y) e^{-|z|/l}, \quad (1.99)$$

а динамика определяется уравнением (1.94) с нулевой правой частью. Уравнение может быть легко проинтегрировано в Фурье-пространстве (1.93), после чего обратное Фурье-преобразование даёт

$$\varpi^V(t, x, y, z) = \frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \Lambda(x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\cos(\xi z/l)}{1 + \xi^2} e^{-(\xi^2+1)(t-t^*)/t_E}. \quad (1.100)$$

Подставив $z = 0$ в выражение (1.100), найдём, что завихренность на поверхности

$$\varpi_z^V(t, x, y, 0) = \frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \Lambda(x, y) \times \left(1 - \text{Erf}(\sqrt{(t-t^*)/t_E})\right). \quad (1.101)$$

Таким образом, на начальной стадии затухания $(t - t^*) \ll t_E$, затухание имеет корневую зависимость от времени, $\varpi_z^V(t, x, y, 0) \propto \left(1 - \sqrt{4(t-t^*)/\pi t_E}\right)$, а при больших временах $(t - t^*) \gg t_E$ зависимость переходит в экспоненциальный закон $\varpi_z^V(t, x, y, 0) \propto \sqrt{t_E/(t-t^*)} \exp(-(t-t^*)/t_E)$.

1.6.3 Сравнение с экспериментальными результатами

В нашей работе [59] описаны результаты эксперимента по возбуждению двумя поверхностными стоячими волнами, распространяющимися в ортогональных направлениях, приповерхностного вихревого течения. Волны возбуждались двумя плунжерами — горизонтальными полу-погруженными в воду палками, расположенными вблизи двух соседних стенок бассейна квадратной формы и

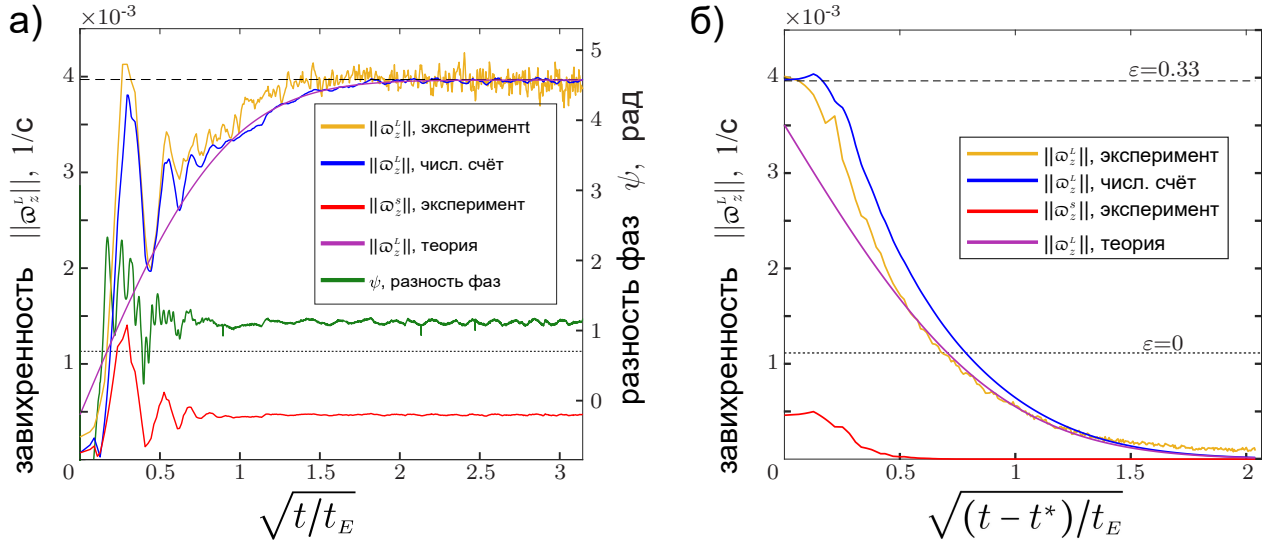


Рисунок 1.3 — Экспериментально измеренная завихренность ω_z^V и теоретические оценки, сделанные в различных приближениях. а) Процесс установления вихревого течения после включения плунжеров; фиолетовая кривая “теория” соответствует (1.98), синяя кривая “числ. счёт” соответствует (1.96) численно проинтегрированному по времени с величинами, взятыми из экспериментальных данных. б) Процесс затухания течения после выключения плунжеров. фиолетовая кривая “теория” соответствует (1.101), синяя кривая “числ. счёт” . соответствует тому же (1.96), где теперь время сдвинуто на t^* .

колеблющимися вертикально по гармоническому закону. До начала работы плунжеров какое-либо течение в воде отсутствовало. Плунжеры начинали двигаться в момент времени $t = 0$ и вынимались из жидкости в момент времени t^* . Размер бассейна составлял $L = 70$ см, частота волны $\omega/2\pi = 3$ Гц, так что в бассейне укладывалось 4 длины волны. Время $t_E = 125$ с. Из экспериментальных данных извлекались как поле на поверхности $V^L(t, x, y, z = 0)_{x,y}$ (из чего вычислялась завихренность массового переноса $\varpi_z^L(t, x, y, z = 0)$) самого среднего по колебаниям массового переноса, так и амплитуды волн $H_{1,2}(t)$ и разность фаз $\psi(t)$ между ними. Экспериментально измеренное половинное время затухания волны $t_s \approx 10$ с

На Рисунке 1.3 приведены экспериментальные данные и их сравнение с теоретическими предсказаниями. На Рисунке 1.3а построены зависимости различных величин от времени для процесса установления волновых колебаний и завихренности ϖ_z^V . Вследствие небольшой отстройки по частоте от резонансной частоты амплитуда колебаний после включения накачки плунжерами ведёт себя немонотонно — наблюдаются биения. Поскольку дрейф Стокса (красная линия)

квадратичен по амплитуде волны, то биения могут в моменте привести к увеличению величины дрейфа до 4 раз по сравнению с его асимптотическим по времени значением. Теоретическая оценка (1.98) для лагранжевой завихренности ϖ_z^L изображена фиолетовой кривой. Результат численного интегрирования уравнения (1.96) изображён синей кривой; в правой части (1.96) поле $\Lambda(t, x, y)$ вычислялось согласно равенству (1.91). Видно весьма неплохое соответствие с непосредственно измеренной величиной (светло-коричневая кривая). Наилучшее приближение численным интегрированием экспериментальных данных было достигнуто при значении безразмерной упругости плёнки (1.22) $\varepsilon = 0.33$.

На Рисунке 1.3б построены зависимости различных величин от времени для процесса затухания завихренности ϖ_z^V после отключения накачки плунжерами волновых колебаний в момент времени $t = t^*$. Обозначения те же самые, что и на Рисунке 1.3а. Видно хорошее соответствие результата численного интегрирования (1.96) (синяя кривая) и результатов непосредственного измерения — коричневой кривой.

1.7 Генерация крупномасштабного вихревого течения двумя волнами, распространяющимися под малым углом друг к другу

Рассмотрим две волны, распространяющиеся под углом 2θ друг к другу, так что угол θ лежит в пределах $0 < \theta < \pi/2$. Форма поверхности в этом случае имеет вид

$$h(t, x, y) = H_1 \cos(\omega t - kx \sin \theta - ky \cos \theta) + H_2 \cos(\omega t + kx \sin \theta - ky \cos \theta). \quad (1.102)$$

Главным образом мы будем интересоваться пределом малых углов $\theta \ll 1$; тогда обе волны распространяются в направлениях, близких к направлению оси Oy . Глубина жидкости d велика в смысле $kd \gg 1$. Мы также полагаем, что размер бассейна L мал по сравнению с длиной пробега волны. Для свободной поверхности это эквивалентно требованию $kL \ll 1/\gamma^2$, если на поверхности присутствует плёнка в $\varepsilon \sim 1$, то требование должно быть усилено до $kL \ll 1/\gamma$.

Стоксова завихренность (1.53), вычисленная для волнового поля (1.102), оказывается равной

$$\varpi_z^S = (1 + \cos(2\theta)) \cdot \Lambda(x) \sin(2\theta) \exp(2kz), \quad (1.103)$$

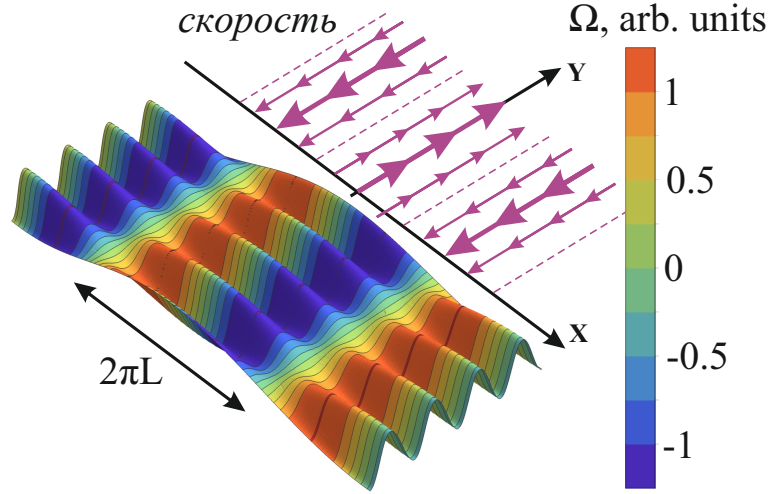


Рисунок 1.4 — Схематичное изображение формы поверхности волны (1.102) и соответствующего вклада в горизонтальную скорость, связанную с вертикальной завихренностью. Цвет соответствует значению завихренности в некоторых произвольных единицах измерения. Стрелки показывают соответствующее поле скорости. Значение угла между волнами было выбрано равным $2\theta = \pi/15$, а также принято $H_1 = H_2$.

глубже вязкого подслоя, а на самой поверхности коэффициент перед $\cos(2\theta)$ должен быть домножен на фактор $1/(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)$. В (1.103)

$$\Lambda(x) = -H_1 H_2 \omega k^2 \sin(x/l) \quad (1.104)$$

описывает пространственное распределение завихренности, смотри Рисунок 1.4. Период модуляции по оси Ox есть $l = 1/(2k \sin \theta)$. Отметим, что для того, чтобы из выражения (1.103) получить в третий член в (1.88), надо сделать несколько шагов: во-первых, положить $\theta = \pi/4$, во-вторых, повернуть систему координат на $\pi/4$, и, в-третьих, вместо бегущих волн (1.102) взять стоячие волны. В вертикальном направлении стоков дрейф проникает на глубину $1/(2k)$. Таким образом, несмотря на большой масштаб по горизонтали l , этот вклад в поток массы остаётся локализованным вблизи поверхности. При стремлении угла к нулю, $\theta \rightarrow 0$, постоянной остаётся амплитуда вариации скорости в x -направлении, связанной с завихренностью, тогда как сама завихренность ω_z^S стремится к нулю.

Теперь перейдём к исследованию эйлерова вклада в завихренность. Стационарное решение (1.84) имеет вид

$$\varpi_z^V = F \cos \theta \cdot \Lambda(x) \exp(z/l), \quad (1.105)$$

$$F = 4 \cos^2 \theta + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)},$$

с Λ определённым в (1.104), сравни со случаем стоячих ортогональных волн (1.98, 1.92, 1.91). По сравнению с выражением (1.103) для стоксовой завихренности, эйлеров вклад ϖ_z^V имеет ту же зависимость по горизонтали, но в $1/\sin \theta$ раз бóльшую амплитуду и гораздо бóльшую глубину проникновения l . Геометрия соответствующего течения следующая: течение направлено вдоль оси Oy ; оно периодически изменяет свой знак при изменении поперечной координаты x , сохраняя своё направление в полосках толщиной πl . Течение есть сдвиговое течение, направленное по оси Oy , и зависящее от координаты x , его скорость

$$V_y = -l\varpi_z^V \operatorname{ctg}(x/l) = -\frac{F \cdot \Lambda(x + \pi l/2)}{2k} \operatorname{ctg}(\theta), \quad (1.106)$$

смотри Рисунок 1.4.

Полученное распределение скорости в пределе $\theta \ll 1$ может быть объяснено в терминах известного решения для течения, индуцированного плоской волной [7]. Скорость медленного течения вдоль оси Oy возрастает в тех областях, где две волны интерферируют конструктивно, так что локально получается волна с амплитудой $H_1 + H_2$. Соответственно, течение достигает минимума там, где амплитуды волн вычитаются. Средний поток, остающийся постоянным вдоль оси Ox , не был включён в рассмотрение и не изображён на Рисунке 1.4, поскольку он не создаёт ненулевой вертикальной завихренности. Если в конечном счёте интересует случай стоячих волн в замкнутом бассейне, то этот средний вклад отсутствует.

Динамика вихревого течения. Из уравнения (1.94) следует, что характерное время установления завихренности $t_E = l^2/\nu$. Если угол между направлениями распространения волн мал, то это время велико по сравнению со временем установления волнового течения и, соответственно, дрейфа Стокса: $t_E \gg t_s$. Поэтому процессы установления и затухания завихренности в жидкости неограниченной глубины описываются теми же зависимостями (1.97) и (1.101) с заменой $F/\sqrt{2} \rightarrow F \cos \theta$.

1.7.1 Течения, индуцированные стоячими волнами

Вертикальная компонента завихренности не описывает вклад в медленное течение, которое имеет ненулевой только горизонтальную компоненту завихренности. Такое течение возбуждается одной бегущей волной в результате нелинейного взаимодействия с самой собой [7]. Скорость этого течения на поверхности жидкости может быть оценена как $V_{prog} \sim \omega d (kH)^2$, где H есть амплитуда волны, а d — глубина жидкости. Если глубина жидкости d больше чем горизонтальный масштаб l вертикальной завихренности, то скорость V_{prog} превосходит скорость V_y (1.106), связанную с вертикальной завихренностью, $V_{prog}/V_y \sim d/L$. В отличие от случая бегущих волн (1.102), в случае стоячих волн вклад в медленное движение типа V_{prog} отсутствует, то есть вертикальная завихренность полностью описывает медленное течение. В изложении можно было бы ограничиться указанием на то, что для вычисления завихренности индуцированного течения следует взять линейные комбинации выражений типа (1.105). Однако ввиду того, что случай стоячих волн является возможной экспериментальной реализацией [61], мы приводим здесь явные выражения.

Рассмотрим две стоячие поверхностные волны, волновые вектора которых составляют угол 2θ между собой, и у которых имеется разность фаз ψ :

$$h(t, x, y) = H_1 \cos(\omega t) \cos(kx \sin \theta + ky \cos \theta) + H_2 \cos(\omega t + \psi) \cos(kx \sin \theta - ky \cos \theta). \quad (1.107)$$

сравни с (1.102). В случае чистой поверхности вклад вертикальная завихренность дрейфа Стокса равна

$$\omega_z^s = \omega k^2 H_1 H_2 \sin(2\theta) e^{2kz} (\sin^2 \theta \cos(2ky \cos \theta) - \cos^2 \theta \cos(2kx \sin \theta)) \sin \psi, \quad (1.108)$$

сравни с (1.103), тогда как эйлерова завихренность в стационарном режиме имеет вид

$$\omega_z^v = 2\omega k^2 H_1 H_2 (e^{2kz \cos \theta} \sin^3 \theta \cos(2ky \cos \theta) - e^{2kz \sin \theta} \cos^3 \theta \cos(2kx \sin \theta)) \sin \psi. \quad (1.109)$$

сравни с (1.105). В пределе $\theta \ll 1$ в выражении (1.109) первое слагаемое относительно мало как θ^3 и локализовано вблизи поверхности на глубине $\sim 1/2k$, оно, соответственно, производит и относительно малый вклад в скорость течения.

Второе слагаемое как раз и описывает крупно-масштабное глубоко проникающее течение, сравни с выражением (1.105).

Далее, если поверхность покрыта жидкой упругой плёнкой с безразмерным модулем упругого сжатия $\varepsilon \gg \sqrt{\gamma}$, то

$$\varpi_z^V = \frac{\omega k^2 H_1 H_2 \varepsilon^2 \sin \psi}{2\sqrt{2}\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)} \left(e^{2kz \cos \theta} \sin \theta \cos(2ky \cos \theta) - \right. \quad (1.110) \\ \left. - e^{2kz \sin \theta} \cos \theta \cos(2kx \sin \theta) \right),$$

снова сравни с (1.105). Опять вклад от первого слагаемого оказывается мал в пределе малого угла $\theta \ll 1$. Таким образом, общее заключение состоит в том, что две стоячие волны (1.107), распространяющиеся под малым углом $2\theta \ll 1$ друг к другу производят почти прямые потоки, смотри текст после уравнения (1.105).

1.7.2 Конечная глубина жидкости

В экспериментальных условиях глубина жидкости d может быть, с одной стороны, велика по сравнению с обратным волновым числом поверхностных волн, $kd \gg 1$, а, с другой стороны, сравнима или мала по сравнению с горизонтальными размерами бассейна, $d \lesssim L$. В этом случае распространение волн по-прежнему подчиняется уравнениями для глубокой воды. Однако, уравнения на медленное крупномасштабное течение, горизонтальный масштаб которого порядка L , должны учитывать присутствие дна. Теперь нижним граничным условием является условие непроскальзывания, $\varpi_z^V|_{z=-d} = 0$. В этом случае стационарным решением (1.94) вместо (1.105) является

$$\varpi_z^V = F \cos \theta \cdot \Lambda(x) \frac{\sinh((z+d)/l)}{\cosh(d/l)}. \quad (1.111)$$

Амплитуда вихревого течения (1.111) оказывается меньше, чем на неограниченной глубине (1.105) вследствие трения о дно. В частности, течение на поверхности уменьшается на фактор $\tanh(d/l)$.

На Рисунке 1.5а) показан график, описывающий процесс установления скорости медленного течения ϖ_z^V на поверхности со временем при различных глубинах жидкости. Зависимости были получены путём численного решения

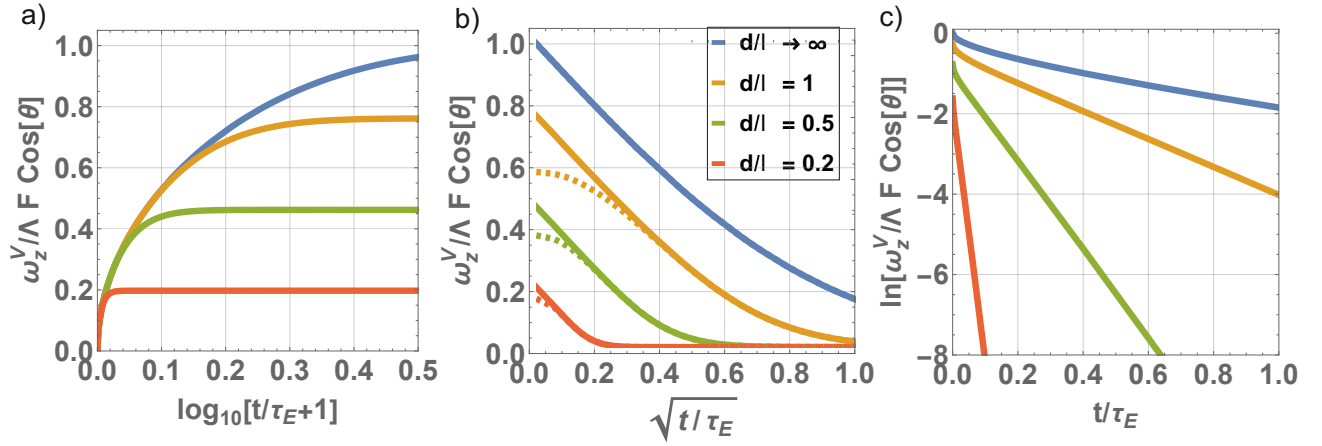


Рисунок 1.5 — Установление (a) и распад (b,c) вихревого течения ϖ_z^V на поверхности жидкости ($z = 0$) при различных глубинах жидкости (численное решение). Кривые для неограниченной глубины соответствуют выражениям (1.97) и (1.101) с заменой $F/\sqrt{2} \rightarrow F \cos \theta$. Асимптотическое значение при больших временах для процесса установления дано в выражениях (1.111). Пунктирные линии соответствуют асимптотическому поведению (1.112). Рисунок 1.5b демонстрирует, что скорость затухания завихренности течения на поверхности не зависит от глубины жидкости на малых временах $t \ll d^2/\nu$, смотри выражение (1.113), а Рисунок 1.5c демонстрирует экспоненциальное затухания на больших временах $t \gg d^2/\nu$, смотри уравнение (1.112).

уравнения. На малых временах $t \ll d^2/\nu$, конечность глубины жидкости не оказывает какого-либо эффекта, так что решение описывается выражением (1.98) с соответствующей поправкой $F/\sqrt{2} \rightarrow F \cos \theta$. На больших временах $t \gg \min(t_E, d^2/\nu)$ решение выходит на стационарное асимптотическое по времени значение (1.111). Отметим, что для малых глубин $d \ll l$ стационарное значение достигается быстрее, чем для неограниченно глубокой жидкости. Аналитическое исследование задачи проведено в Приложении A.1, здесь мы приводим лишь его результаты.

Аналогично, можно рассмотреть процесс затухания течения после того, как оно достигло стационарного состояния (1.111), а затем была отключено возбуждение волн плунжерами в момент времени $t = t^*$. На больших временах $t \gg d^2/\nu$ решение выходит на асимптотику

$$\varpi_z^V(t, x, z) \rightarrow F \cos \theta \cdot \Lambda(x) \sin\left(\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{z}{d}\right)\right) \frac{\exp(-\alpha(t - t^*)/t_E)}{\alpha \cdot d/(2l)}, \quad (1.112)$$

смотри Приложение A.2. Коэффициент $\alpha = 1 + \pi^2 l^2/(4d^2)$ описывает увеличение скорости затухания течения по сравнению с жидкостью неограниченной глуби-

ны. Наоборот, на малых временах $t \ll d^2/\nu$, скорость затухания не зависит от глубины жидкости,

$$\frac{d\varpi_z^v(t, x, 0)}{d\sqrt{t/t_E}} = -F \cos \theta \cdot \Lambda(x) \frac{2 \exp(-(t - t^*)/t_E)}{\sqrt{\pi}}. \quad (1.113)$$

На Рисунках 1.5b,c показаны результаты численного решения уравнения (A.7), описывающих процесс затухания. Как видно, аналитические оценки хорошо согласуются с численными результатами.

1.7.3 Выводы

Кратко суммируем результаты. Мы установили, что для неограниченной по глубине жидкости горизонтальный размер и глубина проникновения крупномасштабного течения равны $l = 1/(2k \sin \theta)$, а амплитуда вертикальной компоненты завихренности этого течения при достижении стационарного состояния $\varpi_z^v \sim \omega k^2 H_1 H_2$ в случае чистой поверхности. Здесь ω есть частота двух волн, k их волновое число, H_1 и H_2 суть амплитуды колебания поверхности в них, а 2θ есть угол между этими двум волнами. В пределе малых углов $\theta \ll 1$ вклад в массовый транспорт от дрейфа Стокса относительно мал по сравнению с эйлеровым вкладом. Кинематическая вязкость жидкости ν не входит в этом выражения, однако она определяет время установления течения $t_E = l^2/\nu$. Глубина жидкости d начинает играть заметную роль, когда становится сравнимой или меньше l . Связанное с конечностью глубины трение о дно вызывает уменьшение амплитуды стационарных течений фактором $\tanh(d/l)$. Кроме того, конечная глубина ускоряет динамику течения. Если на поверхности присутствует плёнка, то она может существенно увеличить амплитуду течения при тех же амплитудах волн, в $\sim \sqrt{\omega/\nu k^2}$ раз.

1.8 Заключение

Массовый транспорт, то есть медленное вихревое движение лагранжевых частиц на фоне волнового движения, состоит из двух компонент, смотри Сек-

цию 1.4, — дрейфа Стокса в волне и эйлерова течения. Дрейф Стокса отличен от нуля на глубине проникновения волнового движения, смотри (1.44). Если массовый транспорт определяется только дрейфом Стокса, то есть течение чисто потенциально, что может быть только в идеальной жидкости, то среднее по времени от скорости жидкости в фиксированной точке пространства равно нулю при условии, что эта точка всегда остаётся под поверхностью жидкости. Средняя по осцилляциям плотность импульса, связанная с волновым движением, в эйлеровой трактовке сосредоточена в узком гребнево-впадинном слое, в котором точки с фиксированными эйлеровыми координатами в течении периода волновых колебаний оказываются то под, то над жидкостью, смотри (1.42) и Рисунок 1.2. Интегралы по глубине от дрейфа Стокса и средней плотности импульса совпадают между собой, поскольку по сути описывают один и тот же физически феномен. Появление вихревой эйлеровой компоненты в медленном течении означает, что средняя скорость жидкости при фиксированной координате в точках, всегда погружённых в жидкость, не равна нулю. Если эйлерово течение также своим происхождением обязано волновому движению и не турбулентно, то оба вклада в массовый транспорт пропорциональны квадрату амплитуды волны, но их динамика различна. Дрейф Стокса определяется последним периодом колебания волны, тогда как время отклика эйлерова течения есть вязкое время, определяемое минимальным масштабом течения.

Процесс возбуждения эйлерова медленного вихревого течения поверхностными волнами можно представить как действие виртуального поверхностного напряжения τ — касательной силы, приложенной на поверхности волны, смотри Пункт 1.4.2 и обсуждение в Пункте 1.5.3. Действие этой силы локализовано в узком гребнево-впадинном слое, включающем в себя гребни и впадины волны и вязкий подслой. Можно сказать, что при затухании волны её импульс, сосредоточенный в этом слое, передаётся медленному течению. Поэтому эта сила возникает только в случае, если жидкость неидеальна, то есть когда у волн есть затухание. В идеальной же жидкости, согласно теореме Кельвина, потенциальное волновое течение не могло бы породить вихревое течение.

В Пункте 1.4.1 мы вычислили Стоксов дрейф для произвольного волнового поля. Мы установили, что его значение в глубине вне вязкого подслоя одно и то же для чистой поверхности и для поверхности, покрытой плёнкой. Внутри вязкого слоя, и, в частности, на поверхности, его величина слабо зависит от параметра плёнки, смотри фактор в (1.103). Затем в Пункте 1.5 мы получили уравнение, опи-

сывающее динамику эйлеровой части завихренности. Сначала в Пункте 1.5.1 для упрощения вычислений мы получили это уравнение в пределе почти несжимаемой плёнки, смотри Ур. (1.65), которое представляет собой уравнение Стокса с поверхностной касательной внешней силой. Формальное решение этого уравнения приведено в Урр. (1.68,1.72). Затем мы редуцировали общее выражение на случай монохроматического по времени волнового поля, смотри Ур. (1.73), из которого была сделана оценка, что амплитуда возбуждаемого волнами медленного вихревого течения возрастает в $\sim 1/\gamma$ раз (γ определено в (1.11)) в присутствии почти несжимаемой плёнки по сравнению со случаем чистой поверхности.

В Пункте 1.5.2 мы обобщили результат на случай плёнки произвольной сжимаемости. Из выражения (1.84) для амплитуды завихренности течения для монохроматического по времени волнового поля следует, что максимум его амплитуды достигается не для несжимаемой плёнки, а для плёнки с конечной сжимаемостью, характеризующейся значением безразмерного модуля упругости $\varepsilon = \sqrt{2}$, который определён в (1.22). При том же значении ε достигается и максимум скорости затухания поверхностных волн, смотри Пункт 1.3.3 и, в частности, Рисунок 1.1. Вообще же, коэффициент в амплитуде вихревого течения (1.84) для случая существенного влияния плёнки $\varepsilon \gg \sqrt{\gamma}$, смотри Таблицу 1, пропорционален скорости затухания волн (1.35). Это подтверждает данную нами выше интерпретацию происхождения касательного виртуального волнового напряжения τ из затухания поверхностных волн.

Почти всегда свойства плёнки априори неизвестны, поскольку процесс её формирования носит спонтанный характер и определяется состоянием окружающей атмосферы. Для интерпретации экспериментальных данных полезно уметь путём независимого измерения определять параметр плёнки. А именно, следует измерять отношение амплитуды горизонтального и вертикального колебания в волне (1.36), и скорость её затухания (1.35,1.90), которые также являются функциями параметра плёнки.

Важно отметить, что вычисления Пункта 1.5.2 и Пункте 1.3.3 проводились с учётом того, что вязкий подслои надо всегда отсчитывать от поверхности жидкости, которая сама перемещается под действием волнового движения. При линейном анализе волн, проведённому в Пункте 1.3, это обстоятельство не играет роли. Однако поскольку дрейф Стокса и виртуальное волновое напряжение квадратичны по амплитуде волны, этот факт следует учесть, см., например, выражение (1.49) для дрейфа Стокса. В терминах вертикальной завихренности медленно-

го течения ϖ_z^V этот учёт равносильен не только учёту смещения поверхности по вертикали, но и её повороту. Поворот поверхности приводит к повороту линейной по амплитуде волны части завихренности, присутствующей в вязком подслое. Формально это приводит к ненулевому вкладу в уравнении Навье-Стокса на квадратичную по амплитуде волны часть завихренности, хотя в действительности нелинейного возбуждения течения посредством этого механизма не происходит. Мы продемонстрировали, что учёт подвижности поверхности жидкости приводит, с одной стороны, к вычитанию этой не-физической части $\langle \varpi_z^{(r)} \rangle$ (1.63) из эйлеровой завихренности ϖ_z^V , а, с другой стороны, к добавлению этой части к завихренности дрейфа Стокса ϖ_z^S , смотри (1.55). В результате полный массовый транспорт (1.59), который и имеет физический смысл, оказывается неизменным. По амплитуде не-физическая часть в $1/\gamma$ раз больше, чем полный массовый транспорт. Поэтому вычисления без учёта смещения поверхности, проведённые в работах [49; 57; 58] автора данной диссертации, приводили к необходимости учёта в дрейфе Стокса и виртуальном волновом напряжении не-физических больших по амплитуде вкладов, что повышало громоздкость вычислений.

1.8.1 Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными

В экспериментальных условиях может быть создана наиболее простая ситуация — возбуждено только две плоские волны одинаковой частоты. Поэтому мы рассмотрели сперва случай, когда возбуждены две бегущие монохроматические волны с амплитудами $H_{1,2}$, имеющие частоту ω , волновое число k и распространяющиеся под углом 2θ друг к другу, смотри (1.102). В случае чистой поверхности виртуальное поверхностное волновое напряжение τ пропорционально вязкости [49], $|\tau| \sim \rho\nu\omega k^2 H_1 H_2$. Порождённое волнами вихревое течение есть сдвиговое течение, периодическое в горизонтальном направлении, ортогональном линиям тока этого течения. Его период равен $2\pi l$, где $l = 1/(2k \sin \theta)$, асимптотическое значение амплитуды скорости V на больших временах $2H_1 H_2 \omega k \cos^3 \theta / \sin \theta$, смотри (1.105, 1.106). Ту же геометрию и направление имеет дрейф Стокса. В случае жидкости неограниченной глубины амплитуда скорости течения равна $2H_1 H_2 \omega k \cos^3 \theta$, смотри (1.103). Таким образом, если угол между волнами поряд-

ка единицы, то амплитуды установившейся эйлеровой скорости и дрейфа Стокса имеют один и тот же порядок; в частности, если волны распространяются под прямым углом, то эйлерова скорость в $\sqrt{2}$ раз больше дрейфа Стокса. Если же угол мал, $\theta \ll 1$, то амплитуда дрейфа Стокса относительно мала как θ .

Если поверхность покрыта жидкой эластичной плёнкой, то соотношение между эйлеровой частью массового транспорта и дрейфом Стокса сильно изменяется. Когда влияние плёнки существенно, виртуальное волновое напряжение значительно возрастает, достигая значений $|\tau| \sim \rho \sqrt{\nu k^2 \omega^3} H_1 H_2$ при $\varepsilon \gtrsim 1$. Установившаяся эйлерова скорость значительно превышает скорость стоковского дрейфа, её амплитуда по порядку величины равна $\gamma^{-1} H_1 H_2 \operatorname{ctg} \theta$, смотри (1.105, 1.106). При этом геометрия течения остаётся той же самой, что и для чистой поверхности. Величина же дрейфа Стокса, как уже было сказано выше, не изменяется в глубине вне вязкого подслоя, а внутри вязкого слоя его величина слабо зависит от параметра плёнки, смотри фактор в (1.103). Отсюда следует, что при существенном присутствии плёнки, когда $\varepsilon \gg \sqrt{\gamma}$, дрейф Стокса следует учитывать только в том случае, если эйлерово течение ещё не вышло на своё стационарное значение, так что его амплитуда порядка дрейфа Стокса, смотри, в частности, Рисунок 1.3, на котором произведено сравнение теории и данных эксперимента.

В эксперименте относительно легко возбудить волны, распространяющиеся под прямым углом друг к другу. Для этого бассейн должен иметь прямоугольную форму. Если длина распространения волны сравнима или меньше чем размер бассейна, то эти две волны являются бегущими. Этот предел реализуется для капиллярных волн, смотри экспериментальную работу [49]. Если же, наоборот, длина распространения значительно превышает размер бассейна, то волны являются стоячими. Нами были получены выражения для пространственной структуры в случае двух ортогональных стоячих волн, смотри (1.88). Амплитуда массового транспорта пропорциональна $\sin \psi$, где ψ — разность фаз между двумя стоячими волнами. Эта зависимость была ранее проверена в экспериментальной работе [84]. Процессы установления и затухания, а также стационарный режим массового транспорта, индуцированного двумя стоячими волнами, были экспериментально исследованы в нашей работе [59], в которой было показано хорошее согласие с построенной нами теорией, смотри Секцию 1.6 и нашу работу [58]. Эти оценки были нами верифицированы на основе экспериментальных данных в нашей работе [59].

Время t_E , характеризующее динамику эйлера течения, для неограниченно глубокой жидкости есть $t_E = l^2/\nu$ (l — характерный масштаб течения) и не зависит от свойств плёнки. Для случая двух ортогональных волн, рассмотренного в Пункте 1.6, $l = 1/\sqrt{2}k$. Если бы поверхность была чистой, а жидкость неограниченной в горизонтальных направлениях, то время t_E было бы сравнимо со временем затухания τ поверхностных волн. В этом случае невозможно было бы говорить об экспериментальной реализации быстрого с точки зрения медленного вихревого течения включения или выключения волнового движения, и интерпретация экспериментов заметно усложнилась. Однако в действительности скорость затухания волн (она же скорость установления волнового движения) $1/\tau$ намного быстрее чем $1/t_E$, $\tau \ll t_E$, в силу двух причин, смотри (1.90): во-первых, поверхность покрыта плёнкой с $\varepsilon \gg \sqrt{\gamma}$, а, во-вторых, бассейн, содержащий жидкость, имеет боковые вертикальные стенки, на которых происходит дополнительное трение волнового движения.

Если же две волны распространяются под малым углом $2\theta \ll 1$ друг к другу, что рассмотрено в Пункте 1.7, масштаб вихревого течения l становится большим по сравнению с длиной волны, $lk \gg 1$. В результате неравенство $t_E \gg \tau$ достигается в любом случае, поскольку верхней оценкой для времени затухания волны является $\tau \sim 1/\nu k^2$. Однако оценка для времени установления вихревого течения может оказаться завышенной. Дело в том, что хотя во всех аналитических выкладках предполагалось, что жидкость является глубокой для волн, конечность глубины жидкости d может оказаться существенной для динамики жидкости, поскольку $t_E = \min(1/\nu l^2, 1/\nu d^2)$. По сравнению со случаем ортогональных волн, амплитуда течения в стационарном режиме увеличивается в $\theta^{-1} \tanh(d/l) \gg 1$ раз, так что дрейф Стокса по-прежнему может быть интересен только на стадии установления течения.

Нами были рассмотрены процесс установления вихревого течения, когда на поверхности исходно спокойной жидкости возбуждаются две волны с постоянной во времени амплитудой, и процесс затухания вихревого течения, когда после завершения установления вихревого течения происходило прекращение возбуждения поверхностных волн. Вихревое течение считалось слабым, и потому подчиняющимся уравнению Стокса, носящему диффузионный характер. Поэтому процесс установления завихренности описывается корневым законом на малых временах $t \ll t_E$, см. (1.98) и Рисунок 1.5. Процесс затухания характеризуется корневым законом на начальной стадии $t \ll t_E$, см. (1.101, 1.113), и экспоненциальным

законом на заключительной стадии затухания, $t \gg t_E$, см. (1.113). Интересно отметить, что в случае жидкости конечной глубины скорость затухания течения на поверхности на начальной стадии не зависит от глубины, см. (1.113). Теоретические предсказания, сделанные нами для случая $\theta \ll 1$ в нашей работе [60], были позже верифицированы в экспериментальной работе [61].

1.8.2 Условия применимости полученных результатов

Обсудим условия применимости полученных результатов. Найденное решение (1.84) при монохроматической накачке применимо, если нелинейные поправки по V несущественны в уравнении (1.9), $(V \nabla) \varpi_z^V \lesssim \nu \Delta \varpi_z^V$. Для случая существенного влияния плёнки, $\varepsilon \gtrsim 1$, в том числе несжимаемой плёнки, из полученного решения (1.73) следует оценка $V \sim \omega k h^2 / \gamma$, $\nabla \sim k$ и $\nu \Delta \sim \gamma^2 \omega$ для случай волн, распространяющихся под углом $\theta \sim 1$. Нелинейные поправки относительно малы, если $kh \lesssim \gamma^{3/2}$. Нужно, однако, помнить, что неустойчивость течения возникает при числе Рейнольдса, значительно превышающее единицу, так что в правой части этого неравенства стоит некоторый большой коэффициент порядка нескольких десятков. Тем не менее, полученное неравенство может оказаться сильнее чем условие малой крутизны волн $kh \ll 1$. Если же угол между направлениями распространения волн мал, $\theta \ll 1$, то условием малости нелинейных поправок становится $kh \lesssim \gamma^{3/2} \theta^{1/2}$. Наконец, если глубина жидкости конечна, $d < 1/k\theta$ при почти параллельном распространении волн, $\theta \ll 1$, то появляется условием становится $kd \lesssim \gamma^{3/2}$.

Кроме того, следует потребовать, чтобы эффект от действия вихревой силы $\mathbf{f}^V$ (1.58) был слабее, чем результат действия виртуального волнового напряжения $\boldsymbol{\tau}$ (1.67, 1.70):

$$\left| \int_{-\infty}^0 dz \mathbf{f}^V \right| \ll |\boldsymbol{\tau}|. \quad (1.114)$$

Поскольку дрейф Стокса проникает вглубь всегда на глубину $\sim 1/(2k)$, а масштаб вихревого течения V есть $\sim 1/(k\theta)$, так что $|\text{rot } V| \sim k\theta V$, то левая часть (1.114) оценивается как $\rho k^{-1}(k\theta V) \cdot U^s$. Из (1.57) следует, что правая часть оценивается

как $\rho\nu(k\theta V)$. Таким образом, условие (1.114) означает $U^s \ll \nu k$. Поскольку дрейф Стокса $U^s \sim k\omega h^2$, то окончательно приходим к требованию $kh \ll \gamma$.

Наконец, в процессе анализа мы неявно предполагали, что скорость нелинейного взаимодействия волн между собой должна быть мала по сравнению со скоростью их затухания. В обсуждавшихся экспериментальных условиях волны были монохроматическими, что резко повышает порог развития прямого каскада гравитационных волн [92]. Волны были достаточно малой амплитуды, так что неустойчивости достигнуты не были [114]. Кроме того, эксперимент проводится в бассейне ограниченного размера (несколько длин волн), так что в случае с капиллярными волнами почти все длинно-волновые собственные моды бассейна не удовлетворяют условиям резонанса.

Глава 2. Распространение инерционных волн на фоне геострофического течения

2.1 Введение

Течения при больших числах Рейнольдса являются нестационарными и должны описываться в рамках статистического подхода. Первая успешная теория была развита А.Н. Колмогоровым [115] для статистически изотропного трёхмерного развитого турбулентного течения. Теория основана на представлении о каскаде энергии, как сохраняющейся величине в отсутствии внешних сил и вязкости, между масштабами — от самых крупных, на которых происходит возбуждение течения внешними силами, к самым мелким, на которых уже нельзя пренебречь вязкой диссипацией энергии. Результатом теории являются скейлинговые законы подобия [116] и точное уравнение для корреляционной функции скорости третьего порядка, см., например, монографию [117].

Напротив, в турбулентных течениях двумерной жидкости наблюдается обратный каскад энергии [17] — каскадная передача кинетической энергии течения от малых вихрей, которые возбуждаются некоторой внешней силой, по цепочке наиболее крупным вихрям, смотри обзоры [18; 27]. Причина передачи энергии в сторону больших масштабов состоит в том, что при течении идеальной двумерной жидкости сохраняется ещё один квадратичный по скорости интеграл движения — энстрофия, которая передаётся как раз более мелким масштабам. Передача каждой из величин — энергии и энстрофии — накладывает свой скейлинговый закон, и поэтому в одну сторону по масштабам обе эти величины передаваться не могут. В статистически стационарном состоянии энергия, переданная наиболее крупным вихрям, уходит из течения посредством какого-либо диссипативного механизма. Обычно таким механизмом является трение о дно или объёмная вязкость.

Отдельным случаем являются геометрически ограниченные двумерные течения, когда масштаб L , накладываемый границами течения, достаточно мал, так что если бы течение было неограниченным при той же удельной мощности, затрачиваемой на возбуждение мелких вихрей, масштаб наиболее крупных вихрей, образовавшихся в результате обратного каскада энергии, значительно бы превышал L [28]. Тогда в статистически стационарном состоянии при опреде-

лённых дополнительных условиях на масштабе L устанавливается когерентное течение, интенсивность которого на столько велика, что диссипативный механизм на этом масштабе компенсирует приток энергии на масштабе возбуждения [17]. В отличие от хаотического неограниченного турбулентного течения, когерентное течение является статистически устойчивым, поскольку его параметры определяются границами течения, а передача энергии когерентному течению происходит непосредственно от масштаба, где внешняя сила возбуждает мелкие вихри. Такое когерентное течение также называют конденсатом, поскольку его кинетическая энергия почти полностью содержится в нескольких первых модах течения. Когерентные аксиально-симметричные вихри были впервые наблюдаемы в эксперименте [22], где течение было ограничено квадратными стенками, а диссипация на наибольших масштабах была обусловлена трением о дно. Затем вихри наблюдались и исследовались в численных моделированиях [25; 118] и экспериментальных работах [23; 119; 120]. Было показано теоретически и путём численного моделирования, что в течениях, где диссипация на наиболее крупных масштабах происходит за счёт трения о дно, радиальный профиль скорости в когерентном вихре является плоским [21; 26]. Экспериментально двумерные течения обычно реализуются в тонких слоях жидкости [121]. В такого рода экспериментах плоский радиальный профиль в когерентном вихре был наблюден в [24], а также в [23]. Если же на наибольших масштабах доминирует вязкая объёмная диссипация, то радиальный профиль скорости в вихре оказывается линейно-логарифмическим [63]. Помимо вихрей, в численном моделировании были наблюдаемы и другие когерентные течения в форме струй, что определялось прямоугольной, а не квадратной формой счётной ячейки, и периодическими граничными условиями [122].

Модель двумерного течения является обычно упрощённой моделью трёхмерного течения, в котором подавлена третья компонента скорости. Подавление может быть обеспечено геометрией границ течения, когда размеры области течения в третьем направлении значительно меньше размеров в ортогональной плоскости. Путём численного моделирования этот вариант был реализован в [99], а в более поздних работах [23; 24; 123; 124] были, в том числе, наблюдаемы и когерентные вихри. К этому варианту относится и уже упоминавшиеся экспериментальные работы по возбуждению турбулентности в тонких слоях жидкости [24; 89]. Развитая для двумерной жидкости теория турбулентности может быть перенесена практически без изменений на тонкие слои жидкости.

Течение быстро вращающейся жидкости

Подавление третьей компоненты скорости может происходить также и по причине вращения жидкости как целого (глобального вращения) и потому быть непосредственно не связанным с геометрией течения [125]. Теорема Тейлора-Прудмана [29; 30] утверждает, что, если число Россби, равное отношению инерционного члена в уравнении Навье-Стокса и силы Кориолиса, мало, то поле скорости жидкости со временем стремится стать квази-двумерным, то есть, не изменяющимся вдоль оси вращения. Иными словами, динамика поля скорости, спроектированного на плоскость, ортогональную оси вращения, и усреднённого вдоль этой оси, становится почти независимой от компоненты течения, существенно зависящей от всех трёх координат. Более того, оно является устойчивым по отношению к малым возмущениям [126], содержащим в себе зависимость от третьей координаты. Квази-двумерное течение называют также геострофическим течением, поскольку в нём сила Кориолиса является потенциальной и потому компенсируется соответствующей подстройкой давления. Как следствие, динамика геострофического течения характеризуется частотами, малыми как число Россби по сравнению с частотой глобального вращения. Некоторый обзор экспериментальных работ по исследованию течений в быстро вращающейся как целое жидкости дан в работе [34]. Отметим, что геострофическое течение является существенной компонентой течения во внешнем жидком ядре Земли (смотри, например, [127]).

Двумеризация течения при сильном вращении подавляет распад геострофических вихрей на более мелкие и открывает возможность для установления обратного каскада энергии. Если затухание крупно-масштабного течения достаточно низкое, то двумеризация течения может привести к формированию геострофических вихрей, которые остаются стабильными на протяжении многих периодов собственных оборотов. Спонтанное формирование долго-живущих геострофических вихрей наблюдалось как в экспериментальных работах [33; 51; 128—132], так и в численных моделированиях [35; 52; 133—136]. Количественно свойства геострофических вихрей изучались статистическими методами путём вычисления ряда корреляционных функций в лабораторной системе координат [51; 125; 137], что предполагает усреднение по всей области течения (измерения). Этот подход может показаться адекватным в силу того, что в большинстве ци-

тированных выше работ геострофическое течение не является в строгом смысле статистически стационарным: долго-живущие геострофические вихри хаотически перемещаются в области течения. Исключением является работа [129], где наблюдались стационарные вихри, поскольку их положение определялось неоднородностью в пространстве мощности возбуждения мелкомасштабного течения.

Роль инерционных волн

Стоит отметить, что статистические свойства геострофического турбулентного течения отличаются от свойств чисто двумерного турбулентного течения. Одним из главных отличий является асимметрия между циклонами и антициклонами [51; 125; 137]. Циклоны являются более ярко выраженными, с циклонической завихренностью, сконцентрированной в сердцевинах вихрей, тогда как антициклонов значительно меньше, так что антициклоническая завихренность более равномерно распределена по объёму. Асимметрия между циклонами и антициклонами объясняется тем, что в циклонах вращение жидкости усиливается, тогда как в антициклонах — ослабляется. Долго-живущие циклоны могут быть по размеру существенно меньше области течения, и вместе с тем их продолжительность существования значительно превышает продолжительность существования вихрей аналогичного размера в чисто двумерной турбулентности. Причина такого различия состоит в том, что в течении быстро вращающейся жидкости присутствует, помимо квази-двумерного течения, ещё одна компонента — инерционные волны, в которых поле скорости существенно зависит от координаты вдоль оси вращения. Частота осцилляций инерционных волн по порядку величины совпадает с частотой вращения [2; 32], т.е. велика, так что эти волны быстро распространяются в объёме течения, перенося с собой импульс и энергию. Было проверено экспериментально, что в главном приближении динамика инерционных волн отвязана от геострофического течения [138]. Если геострофическое течение подавлено, то нелинейное взаимодействие инерционных волн приводит к формированию спектра слабой турбулентности [139], переносящего энергию вниз по масштабам. Замкнутость объёма, во-первых, приводит к появлению отражения инерционных волн и вязкого погранслоя, см. обзор [140], а, во-вторых, может приводить к формированию волновых аттракторов, которые в нелинейном

режиме также приводят к формированию энергетического каскада [141]. Заслуживает внимания и исследование нелинейного распада одной плоской инерционной волны на две [142].

Геострофическое течение, будучи возбуждённым, также нелинейно взаимодействует с волнами, отбирая у них энергию, что приводит к передаче части энергии от волн вверх по масштабам, смотри эксперименты [105; 143] и численный счёт [36; 144] с разными вариантами геометрии и способов возбуждения. Отметим, что в работе [36] явно исследовался процесс передачи энергии от инерционных волн геострофическому течению. Для демонстрации влияния инерционных волн на статистические свойства квази-двумерного течения можно сравнить между собой два численных исследования [35; 136]. В обеих работах предполагались периодические граничные условия по всем трём направлениям, а возбуждение производилось в модах с волновым числом $4 \div 5$. В работе [136] мелкомасштабная сила, возбуждающая течение, была однородна вдоль оси вращения. Поэтому при быстрых скоростях вращения наблюдался диполь из крупномасштабных циклона и антициклона, занимающий весь объём течения и по структуре очень близкий к диполю в аналогичных чисто двумерных численных экспериментах [25; 26; 145]. Напротив, в работе [35] возбуждающая течение сила существенно зависела от координаты вдоль оси вращения. В результате при умеренно малом числе Россби в течении наблюдались три статистически стабильных циклона, а антициклоны отсутствовали.

Постановка задачи и структура исследования

Похожее, но более сложное разделение течения на медленное и быстрое осуществляется в стратифицированной жидкости, в которой наряду с внутренними волнами, имеющими схожий закон дисперсии с инерционными волнами [37], существует медленное течение в виде вихрей, горизонтальный размер которых велик по сравнению с вертикальным [38]. В этих вихрях горизонтальное течение имеет наибольший градиент в вертикальном направлении, что создаёт условие для поглощения в критической плоскости относительно коротких внутренних волн [39], переносящих горизонтальную компоненту импульса, по знаку совпадающую со знаком скорости течения. Волны же, переносящие импульс про-

тивоположного знака, отражаются [37]. В результате от волн медленному течению может передаваться энергия [40]. Мы исследуем аналогичный эффект во вращающейся жидкости, устанавливая его статистические свойства путём рассмотрения динамики ансамбля инерционных волн на фоне геострофического течения. Рассмотрение распространения инерционных волн в геострофическом приближении производилось и ранее, см. например [146], однако в этой работе жидкость предполагалась существенно стратифицированной, что заметно изменяет и усложняет физику. В частности, в законе дисперсии инерционно-гравитационных волн нет направления волнового вектора, соответствующего нулю частоты, а медленное вихревое течение зависит как от вертикальной компоненты, так и, на больших масштабах, от горизонтальных координат. Мы ограничиваемся рассмотрением течений только в однородных по вертикали жидкостях.

Подчеркнём, что мы производим рассмотрение динамики волн не в лабораторной системе координат, а в системе координат, связанной с геострофическим вихрём. Это позволяет считать вихревое течение стационарным. Корреляционные функции флуктуаций скорости, вычисленные таким образом, также имеют привязку к системе координат, связанной с вихрём. Далее мы исследуем структуру течения в отдельном вихре, даже если этот вихрь случайно перемещается по области течения. Мы определяем радиальный профиль азимутальной скорости в вихре, в частности, его зависимость от глобальных безразмерных параметров течения.

Нашей первой работой по исследованию когерентного геострофического течения является [62]. В ней мы определяем структуру когерентного геострофического вихря в пределе малого числа Россби и большого числа Рейнольдса. Течение предполагается неограниченным по вертикали. В численном счёте это соответствует периодическим граничным условиям в этом направлении [35; 136]. В нашей модели плоские инерционные волны возбуждаются модельной объёмной случайной мелко-масштабной силой с однородной статистикой по времени и по пространству. Мы прослеживаем, как инерционные волны распространяются на фоне геострофического вихря. Поскольку длина волны предполагается малой по сравнению с размерами вихря, то дифференциальное течение в вихре следует рассмотреть локально. Локально же это течение представляет собой сдвиговое течение с силой $\Sigma = r_{\perp} \partial_{r_{\perp}} (V^G / r_{\perp})$, где $V^G(r_{\perp})$ — радиальный профиль азимутальной скорости в вихре, а $r_{\perp}$ — расстояние до оси вихря. Число Россби, предполагающееся малым, определяется как $Ro = \Sigma / 2\Omega_0$, где Ω_0 — угловая ско-

рость глобального вращения. Мы показываем, что распространение инерционной волны в сдвиговом геострофическом течении приводит к передаче энергии от волны этому течению. А именно, мы, с одной стороны, устанавливаем, что амплитуда волны в среднем убывает со временем. А, с другой стороны, рассчитанный тензор напряжений Рейнольдса, усреднённый по статистике волн, соответствует отрицательной турбулентной вязкости. В нашей следующей работе [65] мы исследуем влияние конечности числа Россби на динамику волн. В частности, учитывается знак числа Россби, что позволяет описать слабую асимметрию между циклонами и анти-циклонами. В работе [66] мы учитываем влияние границ, главным образом ортогональных оси вращения, на инерционные волны и на геострофическое течение. Далее в работе [64] мы исследовали задачу о поглощении инерционной волны геострофическим течением в другой постановке — когда волновой пакет возбуждается на периферии вихря и затем распространяется по направлению к его оси.

В этой Главе 2 мы главное внимание уделяем исследованию статистических свойств распространения ансамбля инерционных волн на фоне геострофического течения. Сначала мы выводим уравнение на среднее течение в вихре, которое включает в себя тензор Рейнольдса, являющийся результатом усреднения вклада от турбулентных пульсаций в нелинейный член в уравнении Навье-Стокса, смотри Секцию 2.2. Это уравнение также называют уравнением Рейнольдса. Предполагая, что существует разделение пространственных масштабов между средним течением и турбулентными пульсациями, мы устанавливаем связь между значением радиально-азимутальной компоненты тензора Рейнольдса и перетоком энергии между крупными и мелкими масштабами. В частности, мы определяем “коэффициент полезного действия” F , определяющий долю энергетической мощности, которую составляет передаваемая мощность мелкомасштабными турбулентными пульсациями крупномасштабному вихрю от мощности, поступающей от мелко-масштабной внешней силы турбулентным пульсациям. Если $0 < F < 1$, то мы имеем дело эффективно с отрицательной турбулентной вязкостью, характерной для турбулентности на фоне дифференциального вращения в крупных вихревых структурах [20]. В противном случае $F < 0$ турбулентная вязкость положительна и способствует ускоренному затуханию крупномасштабного вихревого течения. Для того, чтобы рассчитать тензор Рейнольдса, надо определить динамику турбулентных пульсаций на фоне крупномасштабного вихревого течения, что мы делаем в Пункте 2.3. Турбулентными пульсациями являются инерционные волны, а дифференциальное вихревое течение локально можно представить как

сдвиговое. Таким образом, задача сводится к исследованию динамики инерционных волн на фоне однородного в пространстве сдвигового течения. Установив эту динамику, мы приступаем к определению статистики турбулентных пульсаций в Пункте 2.4 сперва при произвольном числе Россби и произвольной вязкости. Затем в Пункте 2.5 мы доводим аналитические вычисления до конца в пределе малого числа Россби и слабой вязкости. В частности, мы находим среднюю кинетическую энергию турбулентных пульсаций и радиально-азимутальную компоненту тензора Рейнольдса. В Пункте 2.6 мы рассматриваем задачу в другой постановке, когда локализованный в пространстве волновой пакет распространяется в поле слабо-неоднородного в пространстве геострофического течения. Мы показываем, что часть волн, несущая момент импульса, по знаку совпадающего с направлением вращения в вихре, поглощается, тогда как остальная часть волн отражается.

В конце этого обзора отметим, что любое статистически устойчивое состояние, коим является в том числе и когерентный вихрь, предполагает, что малые по амплитуде возмущения на его фоне затухают со временем. Когерентные течения являются термодинамически неравновесными состояниями, свойства которых сильно не похожи на свойства системы в тепловом равновесии [121; 147]. С этой точки зрения рассмотрение динамики и корреляционных функций мелкомасштабных возмущений на фоне двумерного [21; 148] и трёх-мерного (см. наши работы [62; 65; 66; 73]) когерентных течений представляет интерес как само по себе, так и как характеристика самого статистически устойчивого течения. В эту же логику укладывается исследование радиальных волн конденсата, проведённое в нашей работе [149]. Это отличает нашу деятельность от исследований типа [150], где ищутся решения трёх-мерного уравнения Навье-Стокса, соответствующие локализованным в пространстве стационарным или медленно меняющимся вихревым течениям без учёта влияния турбулентных мелкомасштабных пульсаций.

Работы автора, опубликованные в журналах ВАК, на основании которых написана эта Глава 2, в порядке их хронологического следования: [62], [65], [66], [73], [64].

2.2 Уравнение на среднее течение в вихре

Мы рассматриваем несжимаемое трёх-мерное течение жидкости, вращающейся как целое вокруг оси Oz декартовой системы координат $Oxyz$ со скоростью Ω_0 . Во вращающейся системе отсчёта течение описывается уравнением Навье-Стокса с дополнительным вкладом, соответствующем силе Кориолиса. Мы также предполагаем, что течение возбуждается на малых масштабах некоторой внешней силой $\mathbf{f}$, случайной в пространстве и времени и имеющей нулевое среднее. Таким образом, мы стартуем с уравнения на поле скорости жидкости $\mathbf{v}$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + 2 [\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v}] = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (2.1)$$

Поскольку течение несжимаемо, оно удовлетворяет условию $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Величина p есть эффективное давление делённое на плотность, так что физическое давление $P = \rho(p + [\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r}]^2/2)$, где радиус-вектор $\mathbf{r}$ должен отсчитываться от оси глобального вращения. Мы предполагаем, что сила $\mathbf{f}$ в среднем развивает удельную (на единицу массы) мощность ϵ . В горизонтальном направлении (т.е. ортогональном оси вращения) статистика силы $\mathbf{f}$ характеризуется корреляционной длиной $1/k_f \ll L$, где L есть размер области течения о горизонтали. Число Рейнольдса, характеризующее амплитуду силы, должно быть велико,

$$\operatorname{Re}_f = \frac{\epsilon^{1/3}}{\nu k_f^{4/3}} \gg 1, \quad (2.2)$$

что является условием для того, чтобы полное течение можно было считать турбулентным.

2.2.1 Разделение на геострофическое крупномасштабное течение и мелкомасштабные турбулентные пульсации

Далее, мы предполагаем что в течении сформировался когерентный вихрь. Для его описания удобно ввести цилиндрическую систему координат $\{r_\perp, \varphi, z\}$, причём оси вихря совпадает с осью систему координат, смотри Рисунок 2.1. В области, где когерентное течение существенно, полное поле скорости $\mathbf{v}$ может

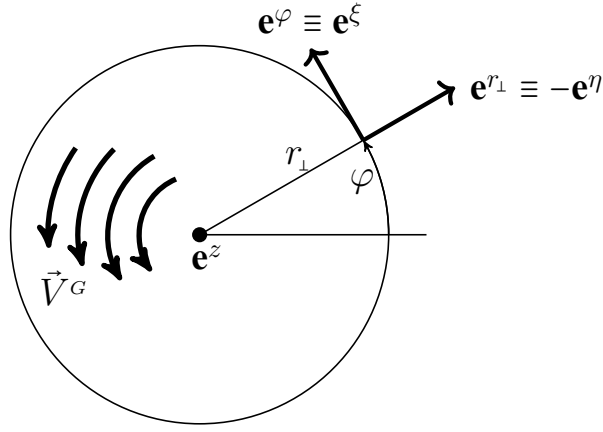


Рисунок 2.1 — Схематичное изображение когерентного вихря и введённых глобальной цилиндрической системы координат $\{r_{\perp}, \varphi, z\}$ и локальной декартовой системы координат $\{\xi, \eta, z\}$.

быть представлено как сумма среднего течения V^G и турбулентных пульсаций $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{V}^G, \quad \mathbf{u} = \{u_{r_{\perp}}, u_{\varphi}, u_z\}, \quad \mathbf{V}^G = \{0, V^G, 0\}, \quad (2.3)$$

По определению, среднее по времени от поля скорости турбулентных пульсаций равно нулю, $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$. То, что внешняя сила развивает в среднем мощность ϵ , и её среднее равно нулю, теперь может быть записано как

$$\langle \mathbf{f} \rangle = 0, \quad \langle (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) \rangle = \epsilon. \quad (2.4)$$

Работая в декартовой системе координат, мы будем выделять первыми буквами греческого алфавита $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$, стоящими в индексах векторов, компоненты векторов и тензоров в плоскости.

2.2.2 Баланс момента импульса

Установим уравнение на среднее геострофическое течение V^G . Пока будем считать, что области течения либо неограничена в направлении оси вращения, либо имеет периодические граничные условия, так что трения о горизонтальные стенки не возникает. Подставим разложение (2.3) в уравнение (2.1) и усредним результат по турбулентным пульсациям. После этого результат спроектируем на азимутальное направление, то есть домножим на единичный вектор $\mathbf{e}_{\varphi}$. Получим:

$$\partial_t V^G = - \left(\partial_{r_{\perp}} + \frac{2}{r_{\perp}} \right) \Pi_{\varphi r_{\perp}}, \quad \Pi_{\varphi r_{\perp}} = \tau - \nu \Sigma, \quad \tau = \langle u_{\varphi} u_{r_{\perp}} \rangle. \quad (2.5)$$

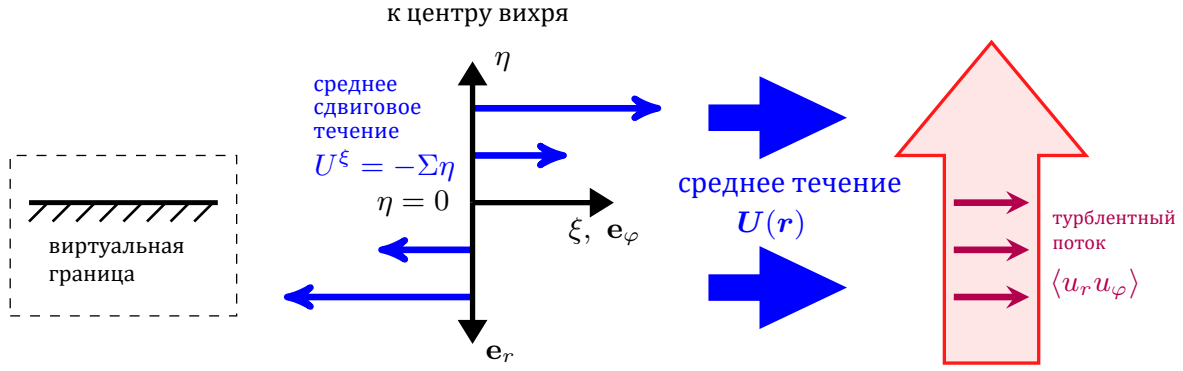


Рисунок 2.2 — Схематическое изображение соотношения геометрии течения и направления потока импульса. Для определённости выбран знак $\Sigma(r_\perp) < 0$. Красная стрелка изображает турбулентную часть потока ξ -компоненты импульса в η -направлении. Виртуальная граница отсутствует для вихревого течения, она добавлена для сравнения со случаем течения в канале при отсутствии глобального вращения.

Средний по времени поток импульса Π_{ij} есть сумма тензора напряжений Рейнольдса $\langle u_i u_j \rangle$, вклада от давления $p\delta_{ij}$ и вязкого члена $-\nu(\partial_i V_j^G + \partial_j V_i^G)$.

Напомним, что локальная сила сдвигового течения в вихре

$$\Sigma = r_\perp \partial_{r_\perp} (V^G / r_\perp), \quad (2.6)$$

её можно воспринимать как меру отличия течения в вихре от твердотельного вращения. Дифференциальное соотношение между силой сдвига $\Sigma(r_\perp)$ и радиальным профилем скорости $V^G(r_\perp)$ может быть переписано в интегральной форме:

$$V^G(r_\perp) = -r_\perp \int_{r_\perp}^R \frac{\Sigma(r'_\perp)}{r'_\perp} dr'_\perp, \quad (2.7)$$

где расстояние R играет роль константы интегрирования. Поскольку на этом расстоянии скорость течения обращается в ноль, то R может быть названо радиусом вихря. Если сила сдвига $\Sigma(r_\perp)$ знакопостоянна внутри вихря, то скорость $V^G(r_\perp)$ внутри вихря, т.е. при $r < R$, имеет знак, противоположный знаку Σ . Разумно предположить, что вне вихря, т.е. при $r > R$, среднее течение отсутствует или по крайней мере не коррелировано с течением внутри вихря. Тогда область $r_\perp \gtrsim R$ должна быть интерпретирована как граница вихря, где нарушается аксиальная симметрия среднего течения.

В дальнейшем мы рассматриваем статистически стационарное состояние. Тогда $\partial_t V^G = 0$, а момент сил $-r_\perp^2 \Pi_{\varphi r_\perp}(r_\perp)$, действующий на слой жидкости внутри

круга радиуса $r_\perp$, должен быть равен нулю. В результате приходим к уравнению

$$\Pi_{\varphi r_\perp} = \tau - \nu \Sigma = 0. \quad (2.8)$$

Это уравнение следует рассматривать как уравнение на профиль скорости в вихре $V^G(r_\perp)$. Важно, что из уравнения (2.8) следует требование

$$\Sigma \langle u_\varphi u_{r_\perp} \rangle > 0, \quad (2.9)$$

которое должно быть выполнено всюду в области существования вихря.

Для того, чтобы пояснить значение неравенства (2.9), введём локальную декартову систему координат $\{\xi, \eta, z\}$, начало которой движется вокруг оси вихря по кругу радиуса $r_\perp$ с угловой скоростью $V^G(r_\perp)/r_\perp$, смотри Рисунок 2.1. Её оси e_ξ , e_η вращаются с той же самой угловой скоростью. В этой системе координат направления единичных векторов $e_{r_\perp}$, e_φ остаются неизменными во времени, а расстояние до центра вихря есть $r_\perp - \eta$. Поскольку речь идёт о локальном выборе системы координат, то мы рассматриваем только расстояния $\eta \ll r_\perp$.

Рассмотрим теперь, для определённости, вихрь с $\Sigma(r_\perp) < 0$. Тогда среднее поле скорости в вихре будет таким как показано на Рисунке 2.2. Неравенство (2.9) означает, что турбулентная часть ξ -компоненты потока импульса (тензора напряжений Рейнольдса) $\langle u_\varphi u_{r_\perp} \rangle$ должна быть направлена к оси вихря. Такое положение дел существенно отличает турбулентное течение в вихре от, например, турбулентного течения вдоль стационарной границы при отсутствии глобального вращения. Если ориентироваться на геометрию Рисунка 2.2, то плоскость $\eta = 0$ могла бы соответствовать стационарной границе течения, а течение жидкости было бы направлено вдоль оси ξ . В этом случае турбулентная часть потока импульса должна была бы быть направленной к границе, см., например, [151] или учебник [2, §44]. Качественно, направление к границе соответствует положительной турбулентной вязкости. Это направление противоположно направлению, выбираемому неравенством (2.9). В случае вихревого течения неравенство (2.9) может быть выполнено только благодаря локальному вращению жидкости с угловой скоростью Ω , которая является суммой глобального вращения Ω_0 и локальной поправки $V^G(r_\perp)/r_\perp$,

$$\Omega(r_\perp) = \Omega_0 + V^G(r_\perp)/r_\perp, \quad (2.10)$$

смотри также [152]. Таким образом, вращение жидкости приводит к феномену, условно называемому отрицательной турбулентной вязкостью [20].

Если $V^G(r_\perp)$ имеет тот же знак что и Ω_0 , то такой вихрь называют циклоном. Согласно соотношению (2.7), циклон соответствует противоположным знакам силы сдвига Σ и полной скорости вращения Ω . В антициклоне, наоборот, V^G и Ω_0 имеют противоположные знаки. Вихрь является статистически устойчивым, если $\Omega(r_\perp)$ нигде внутри вихря не обращается в ноль. Таким образом, знаки Ω и Σ совпадают в антициклоне.

2.2.3 Баланс энергии

Знак тангенциальной компоненты тензора напряжений Рейнольдса $\langle u_\varphi u_{r_\perp} \rangle$ также определяет направление перетока энергии между крупномасштабной компонентой течения V^G и мелкомасштабными турбулентными пульсациями. Проанализируем энергетический баланс, исходя из уравнения Навье-Стокса (2.1). Для этого умножим уравнение скалярно на $\mathbf{v}$ и проведём усреднение по времени. Получим уравнение

$$\partial_t \langle T^{kin} \rangle + \text{div} \langle T^{kin} \mathbf{v} \rangle = -\partial_i \langle v_i p \rangle + \nu \langle v_i \Delta v_i \rangle + \epsilon, \quad (2.11)$$

где удельная плотность кинетической энергии $T^{kin} = \mathbf{v}^2/2$, и мы воспользовались статистическими свойствами силы (2.4).

Проанализируем сначала вязкий вклад:

$$\langle v_i \Delta v_i \rangle = V_i^G \Delta V_i^G + \langle u_i \Delta u_i \rangle = V^G (\partial_{r_\perp} + 2/r_\perp) \Sigma + \frac{\Delta \langle \mathbf{u}^2 \rangle}{2} - Q\epsilon/\nu. \quad (2.12)$$

Введённый параметр

$$Q = \nu \langle \partial_i u_k \partial_i u_k \rangle / \epsilon \quad (2.13)$$

можно назвать долей мощности ϵ , уходящей в вязкую диссипацию кинетической энергии на малых масштабах. Эта доля всегда положительна, но не может быть больше единицы, $0 < Q < 1$. Поскольку мы предполагаем, что применимо локальное приближение, когда радиус вихря R значительно превышает масштаб возбуждения турбулентности $1/k_f$, то член $\Delta \langle \mathbf{u}^2 \rangle / 2$ в уравнении (2.12) мал по сравнению с $Q\epsilon/\nu$ как $1/(k_f R)^2$, и потому им можно пренебречь.

Далее, поскольку мы анализируем стационарный режим, который предполагает аксиальную симметрию вихря, следует выделить только радиальную

компоненту в уравнении на поток энергии (2.11), которая равна $\langle T^{kin} u_{r_\perp} \rangle$. Среднее значение этой компоненты равно

$$\langle T^{kin} u_{r_\perp} \rangle = V^G \langle u_{r_\perp} u_\varphi \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 u_{r_\perp} \rangle. \quad (2.14)$$

Поскольку турбулентные пульсации предполагаются слабыми, то вторым слагаемым в выражении (2.14) также надо пренебречь.

Наконец, проанализируем член, содержащий давление. Вследствие аксиальной симметрии вихря и его однородности вдоль оси вращения в среднем $\langle \mathbf{v} p \rangle$ ненулевой компонентой является только радиальная $\langle v_{r_\perp} p \rangle = \langle u_{r_\perp} p \rangle$. Среднее же $\langle u_{r_\perp} p \rangle = 0$, поскольку статистика поля скорости инерционных волн инварианта относительно поворота на угол π . Это соответствует работе [153], где отсутствие корреляций между давлением и скоростью было принято в качестве гипотезы, основанной на эмпирических наблюдениях [26].

Теперь приравняем нулю производную по времени от средней плотности кинетической энергии, поскольку рассматривается стационарное состояние, и соберём все слагаемые из уравнения (2.11) вместе:

$$\frac{1}{r_\perp} \partial_{r_\perp} (r_\perp V^G \langle u_{r_\perp} u_\varphi \rangle) = \nu V^G (\partial_{r_\perp} + 2/r_\perp) \Sigma + F \epsilon, \quad (2.15)$$

где

$$F = 1 - Q. \quad (2.16)$$

Используем уравнение на баланс момента импульса (2.8) и получим окончательное уравнение на баланс энергии:

$$\Sigma \langle u_{r_\perp} u_\varphi \rangle = \nu \Sigma^2 = F \epsilon. \quad (2.17)$$

Таким образом, скорость вязкой диссипации энергии в крупномасштабном течении $\nu \Sigma^2$ равна удельной мощности $F \epsilon$, передаваемой от мелкомасштабных турбулентных пульсаций крупномасштабному течению. Эта мощность должна быть положительной, и мы ещё раз приходим к условию (2.9). Величину F , которая удовлетворяет условию $F < 1$, можно назвать как коэффициентом передачи энергии от мелкомасштабных турбулентных пульсаций вихревому крупномасштабному течению, так и безразмерным тангенциальным напряжением Рейнольдса. Ещё раз обратим внимание, что условие (2.17) применимо только если вихрь является крупномасштабным, то есть $k_f R \gg 1$.

Исходя из уравнения (2.17), возможно сделать оценку $\langle u_{r_\perp} u_\varphi \rangle \sim \epsilon / \Sigma$, а затем, в соответствии с уравнением (2.8), приходим к оценке на амплитуду течения в

виде $\Sigma \sim \sqrt{\epsilon/\nu}$. На основании этих оценок для дальнейших рассуждений удобно ввести число Россби для крупномасштабного течения

$$\text{Ro}_R = \frac{\sqrt{\epsilon/\nu}}{2\Omega_0}. \quad (2.18)$$

Это число и число Рейнольдса Re_f (2.2), характеризующее мощность накачки, определяют тип течения. Заметим, что если взять стандартное определение числа Россби для малых масштабов

$$\text{Ro}_f = \epsilon^{1/3} k_f^{2/3} / 2\Omega_0, \quad (2.19)$$

то крупномасштабное число Россби окажется равным $\text{Ro}_R = \text{Ro}_f \sqrt{\text{Re}_f}$.

2.3 Динамика турбулентных пульсаций

Уравнение (2.8) содержит вклад от тензора напряжений Рейнольдса $\langle u_\varphi u_{r_\perp} \rangle$, который может быть вычислен, если предположить, что роль градиента поля скорости турбулентных пульсаций $\mathbf{u}$ в их динамике мала по сравнению с градиентом среднего течения Σ . Тогда эволюция турбулентных пульсаций может быть описана в линейном приближении,

$$(\partial_t + (\mathbf{V}^G \nabla)) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{V}^G + 2 [\Omega_0 \times \mathbf{u}] = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (2.20)$$

Теперь перейдём в введённую нами ранее декартову систему координат $\{\xi, \eta, z\}$ (смотри абзац после уравнения (2.9)), выбрав некоторое значение радиальной координаты $r_\perp$. В результате из среднего течения $\mathbf{V}^G$ окажется исключённым средний снос, так что его единственной ненулевой компонентой будет $V_\xi^G = -\Sigma \eta$, то есть, в частности, среднее течение обращается в ноль в начале координат. Кроме того, к глобальному вращению добавится вращение индуцированное вихрём, так что полная локальная скорость вращения жидкости Ω будет даваться выражением (2.10). Получим

$$(\partial_t - \Sigma \eta \partial_\xi) \mathbf{u} - u_\eta \Sigma \mathbf{e}^\xi + 2 \Omega [\mathbf{e}^z \times \mathbf{u}] = -\nabla \tilde{p} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (2.21)$$

Обратим внимание, что эффективное давление $\tilde{p}$ в (2.21) не совпадает с эффективным давлением p в (2.1), поскольку скорости вращения систем координат $Oxyz$ и

$O'\xi\eta z$ не совпадают. По причине присутствия второй производной в вязком слагаемом, уравнение (2.21) удобно решать в Фурье-пространстве, в котором оно приобретает вид

$$(\partial_t + \Sigma k_\xi \partial_{k_\eta}) \mathbf{u}_\mathbf{k} = -2\Omega[\mathbf{e}^z \times \mathbf{u}_\mathbf{k}] + \Sigma u_{\mathbf{k}\eta} \mathbf{e}^\xi - i\mathbf{k} p_\mathbf{k} - \nu \mathbf{k}^2 \mathbf{u}_\mathbf{k} + \mathbf{f}_\mathbf{k}. \quad (2.22)$$

В левой части (2.22) производная по волновому вектору приводит к движению решения по характеристике в Фурье-пространстве:

$$k'_\eta(t) = k_\eta + \Sigma t k_\xi, \quad \mathbf{k}'(t) = \{k_\xi, k'_\eta(t), k_z\}. \quad (2.23)$$

Движение по характеристикам изображено на Рисунке 2.3. На всех характеристиках, за исключением тех, у которых $k_\xi = 0$, на достаточно больших временах $t \gg |k'(0)/k_\xi|$ достигается неравенство $k'(t) \gg k'(0)$, где $t = 0$ предполагается моментом возбуждения, а t — моментом наблюдения. Волна становится намного более коротковолновой, чем в момент возбуждения.

Далее, исключим давление из уравнения (2.22). Для этого следует заметить, что $d(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}'})/dt = 0$. Проекция уравнения (2.22) на $\mathbf{k}$ даёт

$$\tilde{p}_\mathbf{k} = \frac{2i}{\mathbf{k}^2} \left(\Omega k_\eta u_\mathbf{k}^\xi - (\Omega + \Sigma) k_\xi u_\mathbf{k}^\eta \right). \quad (2.24)$$

Подстановка выражения для давления (2.24) в исходное уравнение (2.22) приводит к

$$\frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}'}}{dt} = \hat{C} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'} - \nu \mathbf{k}'^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}'} + \mathbf{f}_{\mathbf{k}'}, \quad (2.25)$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 2\Omega \frac{k_\xi k'_\eta}{k'^2} & \Sigma \left(1 - 2 \frac{k_\xi^2}{k'^2} \right) + 2\Omega \left(1 - \frac{k_\xi^2}{k'^2} \right) & 0 \\ -2\Omega \left(1 - \frac{k_\eta'^2}{k'^2} \right) & -(\Omega + \Sigma) \frac{2k_\xi k'_\eta}{k'^2} & 0 \\ 2\Omega \frac{k'_\eta k_z}{k'^2} & -(\Omega + \Sigma) \frac{2k_\xi k_z}{k'^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

где $\mathbf{u}_\mathbf{k}$ подразумевается вектор-столбцом, а $\mathbf{k}' = \mathbf{k}'(t)$.

В уравнении (2.25) одна из трёх компонент скорости является функцией двух других, поскольку вследствие условия несжимаемости $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\mathbf{k}) = 0$. Для упрощения решения уравнения (2.25) поэтому имеет смысл оставить только две линейно независимые комбинации компонент скорости. Известно два наиболее обоснованных способа это сделать.

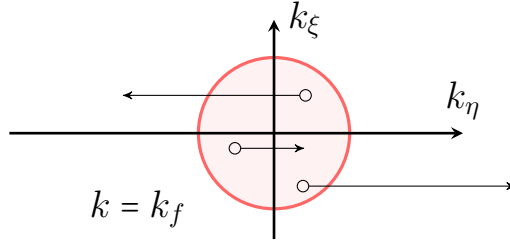


Рисунок 2.3 — Движение вдоль характеристик в $\mathbf{k}$ -пространстве в сдвиговом течении. Незакрашенные кружки соответствуют значению волнового вектора в момент $t = -\tau/\Sigma$, когда турбулентная пульсация была возбуждена внешней силой. Возбуждение течения происходит главным образом внутри красного круга, определяемого равенством $k = k_f$. Линии являются решениями (2.24), их длина соответствует времени наблюдения $t = 0$.

2.3.1 Инерционные волны

Первым способом является разложение поля скорости по поперечным круговым поляризациям:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \sum_{s=\pm 1} a_{\mathbf{k}s} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s, \quad \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s = \frac{[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{e}^z]] + isk [\mathbf{k} \times \mathbf{e}^z]}{\sqrt{2} k k_\perp}, \quad (2.27)$$

где $k_\perp = \sqrt{k_\xi^2 + k_\eta^2}$. Параметр s может принимать значения ± 1 и называется знаком поляризации (или поляризацией) волны. Базисные вектора $\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s$ удовлетворяют условию нормировки и следующим симметричным соотношениям:

$$(\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s}, \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) = 1, \quad (\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s, \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) = 0, \quad \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{*,s} = \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s} = \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^s, \quad (2.28)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение. Комплексная амплитуда волн удовлетворяет условию $a_{-\mathbf{k}s} = a_{\mathbf{k}s}^*$ в силу того, что в координатном представлении поле $\mathbf{u}$ является вещественным.

Полные кинетическая энергия и спиральность течения записываются в виде

$$K \equiv \int d^3r \frac{\mathbf{v}^2}{2} = \int (d^3k) \frac{|\mathbf{v}_{\mathbf{k}}|^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{s=\pm 1} \int (d^3k) |a_{\mathbf{k}s}|^2, \quad (2.29)$$

$$H \equiv \int d^3r (\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) = \int (d^3k) \boldsymbol{\varpi}_{-\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = - \sum_{s=\pm 1} \int (d^3k) sk |a_{\mathbf{k}s}|^2.$$

Отметим, что спиральность линейна по поляризации волн s , т.е. волны с противоположными круговыми поляризациями имеют противоположную спиральность.

Динамика инерционных волн. Обоснованность выбора базиса (2.27) оправдывается тем, что в пределе малого числа Россби круговые поляризации являются собственными для матрицы $\hat{C}$ в (2.26). Когда $\Sigma \ll \Omega$, главным членом в уравнении является сила Кориолиса, которая определяет осцилляции инерционных волн [32]. Если в уравнении (2.22) помимо производной по времени оставить только силу Кориолиса, то динамика амплитуды волны удовлетворяет уравнению

$$\partial_t a_{\mathbf{k}s} = -is\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}s}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = 2\Omega(k_z/k). \quad (2.30)$$

Полное уравнение (2.22), переписанное на характеристике и в базисе круговых поляризаций, имеет вид:

$$\frac{d}{dt} a_{\mathbf{k}'s} = -is\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}s} + \sum_{\sigma=\pm 1} H_{\mathbf{k}'\sigma s} a_{\mathbf{k}'\sigma} - \nu \mathbf{k}'^2 a_{\mathbf{k}'s} + f_{\mathbf{k}'s}. \quad (2.31)$$

где матричные элементы матрицы $\hat{H}$ равны

$$H_{\mathbf{k}ss} = -is\delta\omega_{\mathbf{k}} - \frac{1}{4} \frac{d \ln \mathbf{k}'^2}{\Sigma dt}, \quad \delta\omega_{\mathbf{k}} = \Sigma \frac{k_z(3k_\xi^2 + k_\eta^2)}{2kk_\perp^2}, \quad (2.32)$$

$$H_{\mathbf{k}-s,s} = \Sigma h_{\mathbf{k}}^{s,x} h_{\mathbf{k}}^{s,y} = \Sigma \frac{k_\xi k_\eta (k^2 + k_z^2) - isk k_z (k_\xi^2 - k_\eta^2)}{2k_\perp^2 k^2}. \quad (2.33)$$

Решение (2.31) может быть записано в виде

$$a_{\mathbf{k}'(t)s}(t) = \int_{-\infty}^t dt_1 \exp \left(-\nu \int_{t_1}^t dt_2 k'^2(t_2) \right) \sum_{\sigma} Q_{\mathbf{k}\sigma s}(t, t_1) f_{\mathbf{k}'(\tau)\sigma}(t_1). \quad (2.34)$$

Матрица эволюции $\hat{Q}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \hat{Q}_{\mathbf{k}}(t, t_1) = \hat{M}_{\mathbf{k}'(t)} \hat{Q}_{\mathbf{k}}(t, t_1), \quad Q_{\mathbf{k}\sigma s}(t_1, t_1) = \delta_{\sigma s}, \quad (2.35)$$

$$\hat{M}_{\mathbf{k}'(t)} = -i\omega_{\mathbf{k}'(t)} \hat{s} + \hat{H}_{\mathbf{k}'(t)}, \quad \hat{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

и может быть формально записана в виде упорядоченной экспоненты,

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}}(t, t_1) = \mathcal{T}_{t_2} \exp \left(\int_{t_1}^t dt_2 \hat{M}_{\mathbf{k}'(t_2)} \right), \quad (2.37)$$

где символ $\mathcal{T}_{t_2}$ означает анти-хронологическое упорядочение по времени t_2 . Обратим внимание, что матрица $\hat{Q}_{\mathbf{k}}$ зависит только от направления волнового вектора $\mathbf{k}$.

Предел малого числа Россби. В пределе малого числа Россби, $Ro \sim \Sigma/2\Omega \ll 1$, почти для всех волновых векторов турбулентные пульсации эволюционируют как инерционные волны. Так обстоит дело в секторе $k_z/k \gg \Sigma/\Omega$, где сила Кориолиса превосходит влияние сдвигового течения. В этом секторе частота инерционных волн $\omega_{\mathbf{k}}$ значительно больше всех матричных элементов матрицы $\hat{H}$ (2.32). В главном порядке по малому отношению $\Sigma k/\Omega k_z \ll 1$ должны быть удержаны только диагональные элементы матрицы $\hat{H}$. В этом пределе выражение для амплитуды волны (2.34) оказывается равным

$$a_{\mathbf{k}'(t)s}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau \sqrt{\frac{k'(\tau)}{k(t)}} \exp \left(i s G_{\mathbf{k}}(t, \tau) - \nu \int_{\tau}^t dt_1 k'^2(t_1) \right) f_{\mathbf{k}'(\tau)}^s(\tau), \quad (2.38)$$

где фаза $G_{\mathbf{k}}(t, \tau) = \int_{\tau}^t dt_1 (\omega_{\mathbf{k}'(t_1)} + \delta\omega_{\mathbf{k}'(t_1)})$.

Дадим интерпретацию результату (2.38). Частота осцилляции инерционной волны $\omega_{\mathbf{k}'} = 2\Omega k_z/k'$ изменяется во времени по мере движения вдоль характеристики (2.23). Скорость измерения мала по сравнению с самой частотой,

$$\frac{d \ln \omega_{\mathbf{k}'}}{dt} = \Sigma \frac{k_{\xi} k'_{\eta}}{k'^2} \ll \omega_{\mathbf{k}'}. \quad (2.39)$$

Поэтому, согласно аналитической механике, для волны как для осциллятора должен во времени сохраняться адиабатический инвариант, пропорциональный энергии, запасённый в волне, делённый на её частоту:

$$k' |a_{\mathbf{k}'s}|^2 = \text{inv}, \quad (2.40)$$

То, что общая схема аналитической механики может быть применена к инерционной волне в слабом геострофическом течении, можно было бы с помощью общих рассуждений о сохранении волнового действия при распространении волнового луча [154; 155] или формализма Гамильтона, развитого в отсутствие геострофического течения конкретно для инерционных волн в работе [156]. Вследствие того, что амплитуда волнового вектора асимптотически по времени увеличивается (смотри обсуждение после (2.40)), то (2.40) означает снижение энергии, запасённой в волне. Поскольку же система в пределе малой вязкости целом консервативна, снижение энергии в волне должно означать её передачу остальной части течения — крупномасштабному течению. Это должно быть видно в уравнениях на крупномасштабную компоненту.

2.3.2 Базис Салхи-Камбо

В работе [157] был предложен другой базис. Преимущество этого базиса состоит в том, что в нём уравнение (2.25) может быть решено аналитически в терминах гипергеометрической функции при любом числе Россби. Кроме того, этот базис удобен при анализе асимптотического по времени поведения турбулентных пульсаций, для которых сила Кориолиса сравнима с воздействием сдвигового течения, $(k/k_z)(\Sigma/2\Omega) \gtrsim 1$.

Зададим базис $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^{-1}, \mathbf{e}^3\}$ согласно следующему правилу

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^3 = \frac{\mathbf{k}'}{k'}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{-1} = \frac{[\mathbf{e}^\eta \times \mathbf{e}^3]}{||[\mathbf{e}^\eta \times \mathbf{e}^3]||}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^1 = [\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^{-1}]. \quad (2.41)$$

Проекция скорости на вектор $\mathbf{e}^3$ равна нулю, поэтому разложение векторов $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{f}_{\mathbf{k}}$ имеет вид

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \sum_s u_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^s, \quad \mathbf{f}_{\mathbf{k}} = \sum_s f_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^s, \quad s, \sigma = \{1, -1\}, \quad (2.42)$$

Выбранный базис (2.41) обладает симметрией

$$\mathbf{e}_{-\mathbf{k}}^s = s \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^s \quad (2.43)$$

и зависит от времени вместе с движением по характеристике. Последнее оказывается важным, когда происходит подстановка разложения (2.42) в уравнение эволюции (2.25). Результатом соответствующих вычислений является

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}',-1} \\ u_{\mathbf{k}',1} \end{pmatrix} = \hat{M}_{\mathbf{k}'} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}',-1} \\ u_{\mathbf{k}',1} \end{pmatrix} - \nu k'^2 \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}',-1} \\ u_{\mathbf{k}',1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{\mathbf{k}',-1} \\ f_{\mathbf{k}',1} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

где полная матрица

$$\hat{M}_{\mathbf{k}'} = \frac{1}{k'^2} \begin{pmatrix} 0 & (\Sigma + 2\Omega)k'k_z \\ -2\Omega k'k_z & -\Sigma k_\xi k'_\eta \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Матрица $\hat{Q}_{\mathbf{k}}$ (2.35, 2.37) в базисе Салхи-Камбо формально определяется точно также:

$$\partial_t \hat{Q}_{\mathbf{k}}(t, t_1) = \hat{M}_{\mathbf{k}'(t)} \hat{Q}_{\mathbf{k}}(t, t_1), \quad Q_{\mathbf{k}\sigma}(t_1, t_1) = \delta_{s\sigma}. \quad (2.46)$$

Вследствие симметрии (2.43), матрица $\hat{Q}_{\mathbf{k}}$ обладает симметрией

$$\hat{Q}_{-\mathbf{k}, s\sigma} = s\sigma \hat{Q}_{\mathbf{k}, s\sigma}. \quad (2.47)$$

Асимптотическое поведение эволюции на больших временах. Рассмотрим поведение матрицы эволюции $\hat{Q}$ (2.47) на больших временах. На таких временах компонента k'_η in (2.23) значительно превосходит все остальные вследствие движения волнового вектора вдоль характеристики (2.23). Матрица $\hat{M}$ (2.45) может быть представлена в виде

$$\hat{M}dt \approx -\hat{M}_{lim} \cdot d \ln |k'|, \quad (2.48)$$

$$\hat{M}_{lim} = \begin{pmatrix} 0 & (1 + \text{Ro}^{-1})\mu \\ -\text{Ro}^{-1}\mu & 1 \end{pmatrix},$$

в области $|k'_\eta| \gg |k'_\xi|, |k'_z|$, где $\mu = (k_z/k_\xi) \text{sign } k'_\eta$. Матрица $\hat{M}_{lim}$ не зависит от времени и имеет следующие собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \text{Ro}^{-1}(1 + \text{Ro}^{-1})\mu^2}. \quad (2.49)$$

2.4 Статистика турбулентных пульсаций

2.4.1 Общие свойства корреляционной функции скорости второго порядка

Одним из основных объектов, описывающих статистические свойства хаотического течения, является одновременная парная корреляционная функция. В пределе сильного разделения масштабов, когда масштаб турбулентных пульсаций мал по сравнению с масштабом когерентного течения, статистика турбулентных пульсаций может быть принята локально однородной в пространстве. Тогда парная корреляционная функция зависит только от расстояния $\mathbf{r}$ между точками,

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}/2) u_j(\mathbf{r}' + \mathbf{r}/2) \rangle, \quad (2.50)$$

где усреднение предполагается по времени и/или по позиции центральной точки $\mathbf{r}'$ в области, малой по сравнению с характерным масштабом когерентного течения. Прямое следствие определения (2.50) является равенство $K_{ij}(\mathbf{r}) = K_{ji}(-\mathbf{r})$. Корреляционная функция может быть разделена на симметричную и антисимметричную по $\mathbf{r}$ части,

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = K_{ij}^S(\mathbf{r}) + K_{ij}^A(\mathbf{r}). \quad (2.51)$$

Из определения (2.50) следует, что эти части удовлетворяют также симметриям относительно перестановок векторных индексов,

$$K_{ij}^S(-\mathbf{r}) = K_{ij}^S(\mathbf{r}) = K_{ji}^S(\mathbf{r}) \quad (2.52)$$

$$K_{ij}^A(-\mathbf{r}) = -K_{ij}^A(\mathbf{r}) = K_{ji}^A(\mathbf{r}). \quad (2.53)$$

Для несжимаемого течения имеется дополнительное ограничение $\partial_i K_{ij} = 0$, которое приводит к тому, что симметричная часть $K_{ij}^S(\mathbf{r})$ в общем случае может быть параметризована всего тремя скалярными функциями [158]. Аналогичные аргументы, использованные в [158] и применённые для антисимметричной части $K_{ij}^A(\mathbf{r})$, приводят к заключению, что она может быть параметризована только одной скалярной функцией.

Теперь перепишем корреляционную функцию на языке статистики амплитуд $a_{\mathbf{k}s}$ круговых поляризаций (2.27). Однородность статистики в пространстве приводит к тому, что

$$\langle a_{\mathbf{q}\sigma} a_{\mathbf{k}s} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{k}) A_{\mathbf{k}\sigma s}, \quad (2.54)$$

где корреляционная функция амплитуд круговых поляризаций удовлетворяет симметриям $A_{\mathbf{k}\sigma s} = A_{-\mathbf{k}\sigma s} = A_{\mathbf{k}\sigma s}^*$, следующим из того, что пол скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ является действительным. Таким образом корреляционная функция $A_{\mathbf{k}\sigma s}$ параметризуется, согласно выше проведённым рассуждениям для K_{ij} , четырьмя скалярными функциями $\mathbf{k}$. Для того, чтобы произвести физическую интерпретацию этих параметризующих функций, введём среднюю кинетическую энергию $K_{\mathbf{k}}$ и спиральность $H_{\mathbf{k}}$, запасённые в компоненте поля скорости, характеризующемся волновым вектором $\mathbf{k}$, а также комплексную корреляцию $A_{\mathbf{k}}$ между волнами с противоположными круговыми поляризациями:

$$K_{\mathbf{k}} = \frac{A_{\mathbf{k}--} + A_{\mathbf{k}++}}{2}, \quad H_{\mathbf{k}} = \frac{k(A_{\mathbf{k}--} - A_{\mathbf{k}++})}{2}, \quad A_{\mathbf{k}} \equiv A'_{\mathbf{k}} + iA''_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}-+}. \quad (2.55)$$

Кинетическая энергия $K_{\mathbf{k}} = K_{-\mathbf{k}}$ принимает неотрицательные значения, $H_{\mathbf{k}} = H_{-\mathbf{k}}$ — действительные значения, а корреляция противоположных круговых поляризаций удовлетворяет симметрии $A_{-\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}}^*$, так что $A'_{-\mathbf{k}} = A'_{\mathbf{k}}$, $A''_{-\mathbf{k}} = -A''_{\mathbf{k}}$.

Фурье-образ K_{kij} корреляционной функции скорости $K_{ij}(\mathbf{r})$ выражается следующим образом через корреляционную функцию $A_{\mathbf{k}\sigma s}$,

$$K_{kij} = h_{\mathbf{k}}^{-\sigma,i} h_{\mathbf{k}}^{s,j} A_{\mathbf{k}\sigma s}. \quad (2.56)$$

Для дальнейших вычислений удобно расписать это выражение. Для этого нам потребуется ввести обозначения

$$\delta_{\perp}^{ij} = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2}, \quad \delta_{\alpha\beta}^{12} = \delta^{\alpha\beta} - \frac{k^{\alpha} k^{\beta}}{(k_{\xi})^2 + (k_{\eta})^2}, \quad \check{k}_{ij} = \frac{\epsilon_{ijl} k_l}{k}, \quad (2.57)$$

где все другие матричные элементы δ_{ij}^{12} равны нулю, а также равенства, следующие из определения (2.27) базисных векторов круговых поляризаций

$$h_{\mathbf{k}}^{-s,i} h_{\mathbf{k}}^{s,j} = \frac{1}{2} \delta_{ij}^{\perp} - \frac{is}{2} \check{k}_{ij}, \quad h_{\mathbf{k}}^{s,i} h_{\mathbf{k}}^{s,j} = \frac{1}{2} \delta_{ij}^{\perp} - \delta_{ij}^{12} + \frac{is}{2} (\delta_{il}^{12} \check{k}^{lj} - \check{k}^{il} \delta_{lj}^{12}). \quad (2.58)$$

Используя соотношения (2.58), получаем следующее соотношение между корреляционными функциями

$$K_{\mathbf{k}ij} = \delta_{ij}^{\perp} (K_{\mathbf{k}} + A'_{\mathbf{k}}) + i \check{k}_{ij} \frac{H_{\mathbf{k}}}{k} - 2 \delta_{ij}^{12} A'_{\mathbf{k}} - (\check{k}_{il} \delta_{lj}^{12} - \delta_{il}^{12} \check{k}_{lj}) A''_{\mathbf{k}}. \quad (2.59)$$

Заметим, что только плотность спиральности $H_{\mathbf{k}}$ даёт ненулевой вклад в антисимметричную часть K_{ij}^A корреляционной функции K_{ij} . Корреляция же между противоположными поляризациями $A_{\mathbf{k}}$ не даёт вклада в K_{ij}^A .

2.4.2 Связь статистики скорости со статистикой возбуждающей течение силы

Для того, чтобы связать статистику скорости со статистикой возбуждающей силы, надо сделать некоторые предположения о статистических свойствах силы. Мы предполагаем, что внешняя сила $\mathbf{f}$ коротко коррелирована во времени. Это предположение можно обосновать тем, что в объёме течения невозможно во времени зафиксировать точку приложения силы. В экспериментальной ситуации природа силы, наоборот, такова, что она сама подвержена переносу под действием течения. Например, сила может возникать вследствие конвективных тепловых потоков. Мы предполагаем также, что сила статистически симметрична относительно инверсии в пространстве. Парная корреляционная функция такой силы в Фурье-пространстве есть

$$\langle f_{\mathbf{k}}^i(t_1) f_{\mathbf{q}}^j(t_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta_{ik}^{\perp} \epsilon \delta(t_1 - t_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi(\mathbf{k}). \quad (2.60)$$

Пространственный профиль $\chi(\mathbf{k})$ нормирован на единицу,

$$\int (d^3 k) \chi(\mathbf{k}) = 1, \quad (2.61)$$

стремится к нулю на малых значениях поперечного волнового числа, $k_{\perp} \rightarrow 0$, и на больших, $k_{\perp} \rightarrow \infty$, волновых векторах, что означает, что сила не возбуждает ни очень больших, ни очень маленьких вихрей по сравнению с размером $1/k_f$. Мы также учли, что продольная компонента силы не возбуждает течение, поскольку оно несжимаемо. Поэтому в (2.60) присутствует проектор на поперечное поле $\delta_{ik}^{\perp}$. Статистика силы в координатном пространстве (2.60) эквивалентна следующей статистике в базисе круговых поляризаций:

$$\langle f_{\mathbf{k}s}(t_1) f_{\mathbf{q}\sigma}(t_2) \rangle = \epsilon (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \delta(t_1 - t_2) \chi(\mathbf{k}) \delta_{\sigma s}. \quad (2.62)$$

Статистика силы (2.60) инвариантна по отношению к инверсии в пространстве, поэтому и её спиральность силы равна нулю, о чём в (2.62) свидетельствует симметрия $s \rightarrow -s$, смотри разложение (2.55).

Теперь можно связать статистику скорости со статистикой возбуждающей течение силы, используя решение для амплитуд скорости в общем виде (2.34). Предполагая, что установилось статистически стационарное состояние, получаем в базисе круговых поляризаций для корреляционной функции амплитуд волн

$$A_{\mathbf{k}\sigma s} = \epsilon \int_{-\infty}^0 dt \exp \left(-2\nu \int_t^0 dt_1 k'^2(t_1) \right) \sum_{s'} Q_{\mathbf{k}\sigma s'}^*(0, t) Q_{\mathbf{k}s s'}(0, t) \chi(\mathbf{k}'(t)). \quad (2.63)$$

Для самой корреляционной функции скорости, взятой в совпадающих точках, имеем выражение согласно (2.56)

$$K_{ij}(0) = \epsilon \int (d^3 k) \int_{-\infty}^0 dt \exp \left(-2\nu \int_t^0 dt_1 k'^2(t_1) \right) \sum_{s, \sigma, s'} (h_{\mathbf{k}}^{\sigma, i})^* h_{\mathbf{k}}^{s, j} Q_{\mathbf{k}\sigma s'}^*(0, t) Q_{\mathbf{k}s s'}(0, t) \chi(\mathbf{k}'(t)). \quad (2.64)$$

2.4.3 Исследование общих свойств квадратичных средних

Переход к обратному времени в представлении средних. Для дальнейших вычислений удобно сделать следующие преобразования в (2.64). Во-первых, перейдём к безразмерному обратному времени $\tau = -|\Sigma|t$. Во-вторых, обезразмерим волновые вектора на величину k_f . В третьих, от интегрирования по волновым векторам в момент наблюдения $\mathbf{k}$ перейдём к интегрированию по волновым векторам

в момент возбуждения $\mathbf{q} = k_f^{-1} \mathbf{k}'(-\tau/|\Sigma|)$. Таким образом, характеристика (2.23) в новых переменных примет вид

$$\mathbf{q}'(\tau) = \{q_\xi, q_\eta + \text{sign } \Sigma \cdot \tau q_\xi, q_z\}. \quad (2.65)$$

Матрицу $Q_{\mathbf{k}ss'}(0, t) \equiv Q_{\mathbf{q}ss'}$, фигурирующую в (2.63, 2.64), теперь логично переписать в виде

$$Q_{\mathbf{q}ss'}(\tau) = Q_{\mathbf{k}ss'}(0, -\tau/|\Sigma|)|_{\mathbf{k}=\mathbf{q}'(\tau)}, \quad \partial_\tau \hat{Q}_{\mathbf{k}}(0, -\tau/|\Sigma|) = \frac{1}{|\Sigma|} \hat{Q}_{\mathbf{k}} \hat{M}_{\mathbf{k}'(-\tau/|\Sigma|)}. \quad (2.66)$$

Выражение (2.64) для корреляционной функции теперь выглядит следующим образом:

$$K_{ij}(0) = \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3 q) \chi(\mathbf{q}) \exp(-\Gamma(\tau)) \sum_{s, \sigma, s'} (h_{\mathbf{q}'}^{\sigma, i})^* h_{\mathbf{q}'}^{s, j} Q_{\mathbf{q}\sigma s'}^*(\tau) Q_{\mathbf{q}ss'}(\tau). \quad (2.67)$$

где мы определили “вязкую экспоненту”

$$\Gamma(\tau) = \gamma \int_0^\tau d\tau' q'^2(\tau'), \quad (2.68)$$

и ввели безразмерный параметр, определяющий относительную силу вязкости,

$$\gamma = 2\nu k_f^2 / \Sigma \ll 1. \quad (2.69)$$

В (2.67) функция профиля накачки домножена по сравнению с определением (2.60) на k_f^3 , так что условие нормировки (2.61), записанное в терминах $\mathbf{q}$, формально сохраняет свой вид.

Скорость вязкой диссипации в мелкомасштабной компоненте скорости. Согласно нашим рассуждениям, интерес представляет скорость вязкой диссипации (2.13). Записанная в виде обратного преобразования Фурье, эта величина равна

$$Q = \gamma \int_0^\infty d\tau \int (d^3 q) \chi(\mathbf{q}) \exp(-\Gamma(\tau)) \frac{k^2}{k_f^2} \sum_{s, \sigma} \frac{Q_{\mathbf{q}s\sigma}(\tau) Q_{\mathbf{q}s\sigma}^*(\tau)}{2} \quad (2.70)$$

Средняя кинетическая энергия. Общие свойства средней кинетической энергии удобней рассмотреть в базисе Салхи-Камбо (2.41). В этом базисе корреляционная функция возбуждающей силы имеет тот же самый вид (2.62), но с заменой $\delta_{\sigma s} \rightarrow \sigma \delta_{\sigma s}$. Смена знака, т.е. множитель σ соответствует тому факту, что базис (2.41) обладает симметрией (2.43). Аналогичная замена $A_{\mathbf{k}\sigma s} \rightarrow \sigma A_{\mathbf{k}\sigma s}$ должна быть произведена в (2.54). В результате связь (2.63) статистики амплитуд скорости со статистикой возбуждающей силы остаётся формально неизменной (надо только помнить, что матрица $\hat{Q}_{\mathbf{k}}$ в этом базисе чисто действительна). Наконец, в (2.64) следует заменить базисные вектора $\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s$ на $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^s$ и учесть, что в базисе Салхи-Камбо базисные вектора и матрица $\hat{Q}_{\mathbf{k}}$ действительны.

В базисе Салхи-Камбо удобно исследовать асимптотическое поведение интегрирования по времени в (2.64), которое есть интегрирование по всем временам, предшествующим времени наблюдения. Рассмотрим среднюю кинетическую энергию, равную половине следа корреляционной функции (2.64):

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}{2} = \frac{K_{ii}(0)}{2} = \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3q) \chi(\mathbf{q}) \exp(-\Gamma(\tau)) \sum_{s,\sigma} (Q_{\mathbf{q}\sigma s}(\tau))^2. \quad (2.71)$$

Время, на котором насыщается интеграл по времени в (2.64), есть время передачи энергии крупномасштабному геострофическому течению. Определим это время, считая число Россби для крупномасштабного течения малым, $Ro \ll 1$. Для этого нам потребуется асимптотическое поведение собственных значений матрицы $\hat{Q}_{\mathbf{q}}$ на больших временах, в силу (2.66) задаваемое асимптотическим выражением (2.49) для собственных значений матрицы $\hat{M}$. Действительные части обоих собственных значений всегда не отрицательны и удовлетворяют неравенствам, $0 < \text{Re } \lambda_2 < 1/2 < \text{Re } \lambda_1 < 1$, так что след от квадрата матрицы $\hat{Q}(\tau)$, фигурирующий в (2.71), при $\tau \gg 1$ может быть оценён как

$$(Q_{\mathbf{q}\sigma s}(\tau))^2 \sim \begin{cases} \left(\frac{q}{q'(\tau)} \right)^{2\text{Re } \lambda_2}, & q'(\tau) \gg q, \\ \left(\frac{q}{q'(\tau)} \right)^{2\text{Re } \lambda_1}, & q'(\tau) \ll q. \end{cases} \quad (2.72)$$

Условием для реализации первого неравенства в (2.72) является $\tau|q_\xi| \gg q$, для реализации второго — $\tau|q_\xi| \gg q'(\tau)$, смотри уравнение характеристики (2.65). Первая асимптотика верна для большей части начальных состояний волнового вектора $\mathbf{q}$, то есть время $\tau \sim 1/\text{Re } \lambda_2$ есть типичное время, за которое гармоника отдаёт свою энергию крупномасштабному течению. Вторая асимптотика определяет

меру сингулярности интеграла, поскольку отношение q/q' в соответствующей области волновых векторов велико. Эта асимптотика, таким образом, описывает моды, которые принимают энергию от крупномасштабного течения. Вклад в интеграл (2.71) в этой области при $\tau \gg 1$ можно оценить как

$$\frac{\langle u^2 \rangle}{2} \sim \epsilon \int_0^\infty d\tau \int (d^3 q) \chi(\mathbf{q}) \left(\frac{q_\xi^2 + q_\eta^2 + q_z^2}{(\tau q_\xi - q_\eta)^2 + q_\eta^2/\tau^2 + q_z^2} \right)^{\text{Re } \lambda_1} \exp(-\Gamma(\tau)). \quad (2.73)$$

Будем считать, что вязкость ещё несущественна при выбранном τ , так что $\exp(-\Gamma) \approx 1$. Интеграл (2.73) насыщается при малых $|q_\xi| \ll 1$, поэтому

$$\frac{\langle u^2 \rangle}{2} \sim \epsilon \int_0^\infty d\tau dq_\eta dq_z \chi(\{0, q_\eta, q_z\}) \frac{(q_\eta^2 + q_z^2)^{\text{Re } \lambda_1}}{\tau (q_\eta^2/\tau^2 + q_z^2)^{\text{Re } \lambda_1 - 1}}. \quad (2.74)$$

Если ситуация существенно трёх-мерная, так что $q_z \sim 1$, то $\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 1/2$, и правая часть (2.73) является точным выражением. Интеграл (2.74) набирается при $q_\eta \sim 1$, а интеграл по времени расходится логарифмически. Получаем, что в этом случае турбулентная пульсация, возбуждённая в момент $-\tau$, к настоящему моменту сохранила $\sim 1/\tau$ часть своей полной кинетической энергии. (Более аккуратное вычисление, проведённое ниже в Пункте 2.5, показывает, что эта часть равна $\tau^{-1} \ln \tau$.)

Рассмотрим противоположный предел — чисто двумерное течение, когда $q_z = 0$. Согласно (2.49), $\lambda_1 = 1$, и правая часть (2.73) снова является точным выражением (другое значение $\lambda_2 = 0$ соответствует движению вдоль оси вращения; это течение предполагается подавленным вследствие существования горизонтальных границ). Тогда после интегрирования по волновому числу q_η в (2.74) получаем, что подинтегральное выражение не зависит от времени. Можно провести и другое вычисление: предположим, что корреляционная функция внешней силы $\chi(\mathbf{q})$ аксиально-симметрична; тогда интегрирование по направлению вектора $\mathbf{q} = \{q_\xi, q_\eta, 0\}$ касается только отношения $(q/q')^2$, а результат этого интегрирования равен единице. Мы приходим к качественному выводу, что энергия турбулентного мелкого вихря не уменьшается с течением времени, если не учитывать влияние вязкости (то есть если положить вязкую экспоненту равной единице). Тогда как моды с $q_\xi \sim 1$ действительно передают свою энергию крупно-масштабному течению, специальные моды с

$$q_\eta \sim 1, \quad q_\xi \approx q_\xi^* = \frac{q_\eta}{\text{sign } \Sigma \cdot \tau} \ll 1, \quad \Sigma q_\eta q_\xi > 0, \quad (2.75)$$

$$\text{i.e. } |k_\eta| \ll k_f, \quad |k_\xi| \lesssim k_f/|\Sigma|\tau,$$

наоборот, получают энергию от крупно-масштабного течения (в области (2.75) приближение (2.48) также применимо). Интеграл (2.73), записанный в терминах волнового вектора $\mathbf{k}$, согласно второй строчке (2.75) имеет инфракрасную расходимость, то есть определяется наименьшими k , или наибольшими масштабами. В результате вычисление выходит за рамки своей применимости, поскольку средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций $\langle u^2 \rangle$ определяется крупно-масштабными нулевыми модами [159]. Формально же интеграл (2.73) сходится, только если учесть вязкую диссипацию. Отсюда можно сделать качественный вывод о том, что и тангенциальная компонента тензора Рейнольдса $\langle u_\varphi u_{r_\perp} \rangle$ (2.5) оказывается отличной от нуля, только если учесть влияние вязкости, что было подтверждено непосредственными вычислениями этой величины в [21]. Время передачи энергии когерентному течению оценивается как $\sim 1/\nu k_f^2$.

Теперь рассмотрим предел $0 < \text{Re } \lambda_1 \ll 1$, соответствующий медленной зависимости поля вихря от вертикальной координаты, $\mu = |k_z/k_\xi| \ll \text{Ro}$, смотри (2.49). Приближённое выражение для собственного значения матрицы $\hat{M}_{lim}$ (2.48) есть $\lambda_1 = -1 + \lambda'$, где $\lambda' = \text{Ro}^{-2} \mu^2$. В рассматриваемом случае (2.73) является лишь оценкой. Главный вклад в интеграл (2.73) происходит от области (2.75), для которой вязкая экспонента Γ (2.73) становится порядка единицы на временах $\tau \lesssim 1/\nu k_f^2$. Зафиксируем в (2.73) q_z , и произведём интегрирование сначала по k_ξ , получив (2.74), а затем по q_η . В результате подинтегральное выражение окажется пропорциональным $\tau^{-2\lambda'}$ на временах $\Sigma\tau < (k_f/k_z)\text{Ro}$, где $\mu \sim \mu^* = \Sigma\tau k_z/k_f$ и $\lambda' \sim (\Sigma\tau)^2 (k_z/k_f)^2 \text{Ro}^{-2}$. Таким образом, время t_{tr} , требуемое для передачи энергии от мелкомасштабного вихря когерентному течению, оценивается как

$$t_{tr} \sim \frac{k_f}{k_z} \text{Ro} \cdot \Sigma^{-1}. \quad (2.76)$$

Оценка (2.76) применима, пока $t_{tr} \ll 1/\nu k_f^2$. Если же $t_{tr} \gtrsim 1/\nu k_f^2$, то мы имеем дело с эффективно чисто двумерным случаем, для которого, как обсуждалось выше, передача энергии происходит за время $\sim 1/\nu k_f^2$.

2.5 Статистически изотропная сила и предел малого числа Россби

Здесь мы продолжаем исследование в предположении, что число Россби мало, так что нет необходимости учитывать малые поправки по этому параметру.

В пределе, когда динамика волны в главном приближении определяется силой Кориолиса, так что применимо приближение (2.38), точное выражение (2.63) упрощается до

$$A_{\mathbf{k}\sigma s'} = \delta_{\sigma s} \epsilon \int_{-\infty}^0 dt \chi(\mathbf{k}'(t)) \frac{k'(t)}{k} e^{-2 \int_t^0 dt_1 \nu k'^2(t_1)}. \quad (2.77)$$

Таким образом, в пределе малого числа Россби статистически изотропная сила возбуждает только вклад в корреляционную функцию, определяемый средней кинетической энергией в волне, смотри (2.55). Корреляции же между противоположными поляризациями подавлены. Эволюция не производит и нарушения зеркальной симметрии турбулентных пульсаций, так что спиральность как равна нулю при возбуждении внешней силой, так и остаётся равной нулю всегда. В дальнейшем нам понадобится корреляционная функция компонент скорости (2.59) в совпадающих точках, ввиду (2.77) равная

$$K_{ij}(0) = \epsilon \int (d^3 k) \int_{-\infty}^0 dt \delta_{ij}^\perp K_{\mathbf{k}} \chi(\mathbf{k}'(t)) \frac{k'(t)}{k} e^{-2\nu \int_t^0 dt_1 k'^2(t_1)}. \quad (2.78)$$

Далее предположим, что статистика возбуждающей силы изотропна в пространстве, так что в (2.62)

$$\chi(\mathbf{k}) = \chi(k). \quad (2.79)$$

Проведём оценку парных одноточечных средних для компонент поля скорости турбулентных пульсаций. Некоторые аналитические оценки мы будем доводить до числа, в частности, путём численного счёта, выбрав для примера конкретный вид профиля накачки

$$\chi(k) = \frac{16\pi^{3/2}}{3k_f^5} k^2 \exp\left(-\frac{k^2}{k_f^2}\right). \quad (2.80)$$

2.5.1 Тангенциальное напряжение Рейнольдса.

Начнём с наиболее интересного с точки зрения среднего течения — с перекрёстного среднего $\langle u_{r_1} u_\varphi \rangle = -\langle u_\xi u_\eta \rangle$, которое входит уравнение (2.8). Используя

общее выражение для корреляционной функции компонент скорости (2.78), получаем, что

$$\langle u_{r_1} u_\varphi \rangle = \epsilon \int (d^3 k) \int_{-\infty}^0 dt \chi(\mathbf{k}'(t)) \frac{k_\xi k_\eta k'(t)}{k^3} \exp \left(-2\nu \int_t^0 dt' k'^2(t') \right). \quad (2.81)$$

В результате замены (2.65) и переходу к обратному времени интеграл (2.81) переписывается в виде

$$\langle u_{r_1} u_\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int (d^3 q) \chi(q) \int_0^\infty d\tau \frac{q_\xi q'_\eta(\tau) q}{q'^3(\tau)} \exp(-\Gamma), \quad (2.82)$$

где $\Gamma(\tau)$ определено в (2.68). Теперь заметим, что

$$\frac{q_\xi q'_\eta(\tau)}{q'^3(\tau)} = -\text{sign } \Sigma \cdot \frac{d}{d\tau} \frac{1}{q'(\tau)}, \quad \frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} = \gamma q'^2(\tau). \quad (2.83)$$

Благодаря этому в интеграле по времени (2.82) возможно произвести интегрирование по частям, выделив главный вклад и малую поправку Q , смотри (2.16), имеющую смысл части мощности, уходящей в вязкую диссипацию на малых масштабах (2.13):

$$\langle u_{r_1} u_\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} (1 - Q), \quad Q = \gamma \int_0^\infty d\tau \int (d^3 q) \chi(q) \cdot q q'(\tau) \cdot \exp(-\Gamma(\tau)), \quad (2.84)$$

где обозначение Q мы использовали согласно (2.17). Можно непосредственно убедиться, что общее выражение (2.70) для скорости вязкой диссипации на малых масштабах (2.13) даёт то же выражение (2.84) в пределе малого числа Россби.

Главный вклад в интеграл (2.82) возникает из интегрирования полной производной по времени,

$$-\frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int (d^3 q) \chi(q) \int_0^\infty d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{q}{q'(\tau)} \exp(-\Gamma) \right). \quad (2.85)$$

На больших временах $\tau \gg 1$ отношение $q/q' \sim 1/\tau |q_\xi|$. Это отношение убывает при $|q_\xi| \sim 1$ и недостаточно сингулярно при $|q_\xi| \ll 1$, так что интегрирование по углам (по направлениям вектора $\mathbf{q}$) не даёт существенной расходимости. Поэтому главный вклад набирается на временах $\tau \sim 1$ (что соответствует физическим временам $\sim 1/\Sigma$), что качественно отличает трёх-мерную ситуацию от двумерной, где насыщение интеграла происходит только благодаря вязкости на временах $\tau \sim 1/\gamma$

(что соответствует физическим временам $\sim 1/\nu k_f^2$) [21]. Таким образом, передача энергии от инерционных волн геострофическому течению не обязана своим происхождением вязкости.

Для того, чтобы оценить интеграл в (2.84), определяющий поправку Q , нам требуется разобраться с поведением различных множителей в подинтегральном выражении. В дальнейшем нам придётся оценивать ещё несколько интегралов типа (2.84), которые будут отличаться от (2.84) модификацией множителя $qq'(\tau)$. Поэтому имеет смысл выработать общую методику оценки подобных интегралов. Описанный путь вычисления интеграла (2.82) был впервые применён для двумерной системы в работе [21]. Для начала выпишем полные выражения для $q'^2(\tau)$ и $\Gamma(\tau)$:

$$q'^2(\tau) = (1 + \tau^2) \left(q_\xi - \frac{\text{sign } \Sigma \cdot \tau}{1 + \tau^2} q_\eta \right)^2 + \frac{1}{1 + \tau^2} q_\eta^2 + q_z^2. \quad (2.86)$$

$$\Gamma = \frac{\gamma\tau}{3} (\tau^2 + 3) \left(q_\xi - \frac{3 \text{sign } \Sigma \cdot \tau}{2(\tau^2 + 3)} q_\eta \right)^2 + \gamma\tau \frac{\tau^2 + 12}{4(\tau^2 + 3)} q_\eta^2 + \gamma\tau q_z^2 \quad (2.87)$$

В процессе рассуждений визуально полезно обращаться к Рисунку 2.3. На больших временах $\tau \gg 1$ и при типичных значениях компоненты волнового вектора $q_\xi \sim 1$ движение по характеристике (2.65) уводит волновые вектора из области $q \sim 1$, поскольку $q'(\tau) \sim \tau \gg 1$. Условие сохранения адиабатического инварианта (2.40) означает, что соответствующий вклад в подинтегральное выражение (2.84) подавлен как $\sim 1/\tau$. Кроме того, вязкость приводит к экспоненциальному подавлению, которое оказывается существенным на временах

$$\tau > \tau_* \equiv \gamma^{-1/3}. \quad (2.88)$$

Вязкая экспонента Γ в (2.84) на таких временах оценивается как $\Gamma \sim (\tau/\tau_*)^3/3$.

Однако для области волновых векторов с аномально малой ξ -компонентой, $|q_\xi| \ll 1$, степень этих подавлений оказывается существенно сниженной. В этой области отношение волновых чисел $q/q'(\tau) \sim 1/\tau|q_\xi|$, а вязкая экспонента (2.68) $\Gamma \sim (q_\xi)^2 (\tau/\tau_*)^3/3$, смотри точные выражения (2.86, 2.87). Таким образом, динамика, описываемая уравнением (2.21), производит селекцию вол с малым $|q_\xi| \ll 1$, сохраняя их амплитуды в течении более долгого времени нежели амплитуды всех остальных волн с $|q_\xi| \sim 1$. Эта селекция анизотропна, что приводит к увеличению корреляционной длины турбулентных пульсаций в ξ -направлении линий тока когерентного течения. На временах $\tau \gg 1/\gamma$ вязкая экспонента всегда подавлена,

$\Gamma \gg 1$, для любых векторов с исходным волновым числом $q \sim 1$, $\Gamma \gg 1$. Итак, только два временных интервала могут вносить существенный вклад в интегралы типа (2.84): первый есть $\tau < \tau_*$, который мы будем называть ‘баллистическими временами’, второй есть $\tau_* < \tau < 1/\gamma$, который мы будем называть ‘вязкими временами’.

В результате наших рассуждений определим области, вне которых вклад в интегралы типа (2.84) является несущественным. На всех временах профиль корреляционной функции накачки $\chi(q)$ накладывает ограничение $q \lesssim 1$. На вязких временах вязкая экспонента накладывает дополнительное ограничение

$$|q_\xi| \lesssim (\tau_*/\tau)^{3/2} : \quad q'(\tau) \lesssim \tau_*^{3/2}/\sqrt{\tau}. \quad (2.89)$$

Теперь мы можем оценить величину поправки в (2.84):

$$Q \sim \gamma \int_0^{\tau_*} d\tau \tau + \gamma \int_{\tau_*}^{1/\gamma} \frac{\tau_*^3 d\tau}{\tau^2} \sim \frac{1}{\tau_*} = \gamma^{1/3} \ll 1. \quad (2.90)$$

Интеграл набирается вблизи времён $\tau \sim \tau_*$, что соответствует физическим временам $t \sim (\Sigma^2 \nu k_f^2)^{-1/3}$.

Проведём окончательные расчёты для конкретного профиля возбуждающей силы (2.80). Интеграл (2.82) в сферических координатах переписывается в виде

$$\langle u_{r_1} u_\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} \int \frac{q^2 dq \sin \theta d\theta d\phi}{(2\pi)^3} \chi(\mathbf{q}) \int_0^\infty \frac{d\tau}{2\lambda^{3/2}} \frac{d\lambda}{d\tau} \exp(-\gamma q^2 \Lambda). \quad (2.91)$$

где θ, ϕ суть сферические углы, параметризующие вектор $\mathbf{q}$, и

$$\lambda(\tau) = 1 + \tau \sin^2 \theta \sin(2\phi) + (\tau \sin \theta \cos \phi)^2, \quad \Lambda(\tau) = \int_0^\tau \lambda(\tau') d\tau'. \quad (2.92)$$

После подстановки (2.80), аналогом выражения (2.84) является

$$\langle u_{r_1} u_\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} \left(1 - \gamma \frac{5}{8\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda} d\tau}{(1 + \gamma \Lambda)^{7/2}} \right) \approx \frac{\epsilon}{\Sigma} (1 - Q_{1/3} \gamma^{1/3}). \quad (2.93)$$

Численное значение константы $Q_{1/3} \approx 1.8$. Разумеется, это значение зависит от конкретного выбора профиля корреляционной функции возбуждающей силы (2.80).

2.5.2 Средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций

Теперь оценим среднюю кинетическую энергию турбулентных пульсаций $\langle \mathbf{u}^2 \rangle / 2$. Свёртка (2.78) даёт

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}{2} = \epsilon \int (d^3 k) \int_{-\infty}^0 dt \chi(\mathbf{k}'(t)) \frac{k_\xi k_\eta k'(t)}{k^3} \exp \left(-2\nu \int_t^0 dt' k'^2(t') \right). \quad (2.94)$$

Переход с заменой обозначений и переменных интегрирования, аналогичный переходу от (2.81) к (2.82), приводит к выражению

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}{2} = \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int (d^3 q) \chi(q) \int_0^\infty d\tau \frac{q}{q'(\tau)} \exp(-\Gamma). \quad (2.95)$$

Интеграл (2.95) насыщается при $q_{\eta,z} \sim 1$. На больших временах $q/q' \sim 1/(\tau|q_\xi|)$, если $|q_\xi| > 1/\tau$; в противном случае это отношение около единицы. Интегрирование отношения q/q' по q_ξ даёт фактор $\sim (2/\tau) \ln \tau$ на баллистических временах (следует учитывать ограничение $|q_\xi| \lesssim 1$) и фактор $\sim \tau^{-1} \ln(\tau_*^3/\tau)$ на вязких временах (следует учитывать ограничение (2.89)). Оставшийся интеграл по времени имеет вид

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}{2} \sim \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int_1^{\tau_*} \frac{\ln \tau d\tau}{\tau} + \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int_{\tau_*}^{1/\gamma} \frac{\ln(\tau_*^3/\tau) d\tau}{\tau}. \quad (2.96)$$

В результате полный интеграл оценивается как

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}{2} \sim \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \left(\ln^2 \tau_* + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\gamma \tau_*} \ln(\tau_*^5 \gamma) \right) \sim \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \ln^2 \gamma. \quad (2.97)$$

Проанализируем, на каких временах набирается кинетическая энергия. Как следует из вида интеграла по времени (2.96), интеграл набирается на временах $\tau \sim 1/\gamma$. Это большое время, в физических единицах оно равно $1/\nu k_f^2$. Однако расходимость на этих временах всего лишь логарифмического характера. Это означает, что мелкомасштабный вихрь, возбуждённый $\tau \gg 1$ время назад (т.е. на физических временах $t \gg 1/|\Sigma|$), к настоящему времени передал большую часть энергии крупномасштабному течению. Величина остатка этой энергии в мелкомасштабном вихре оценивается подинтегральным выражением в (2.96).

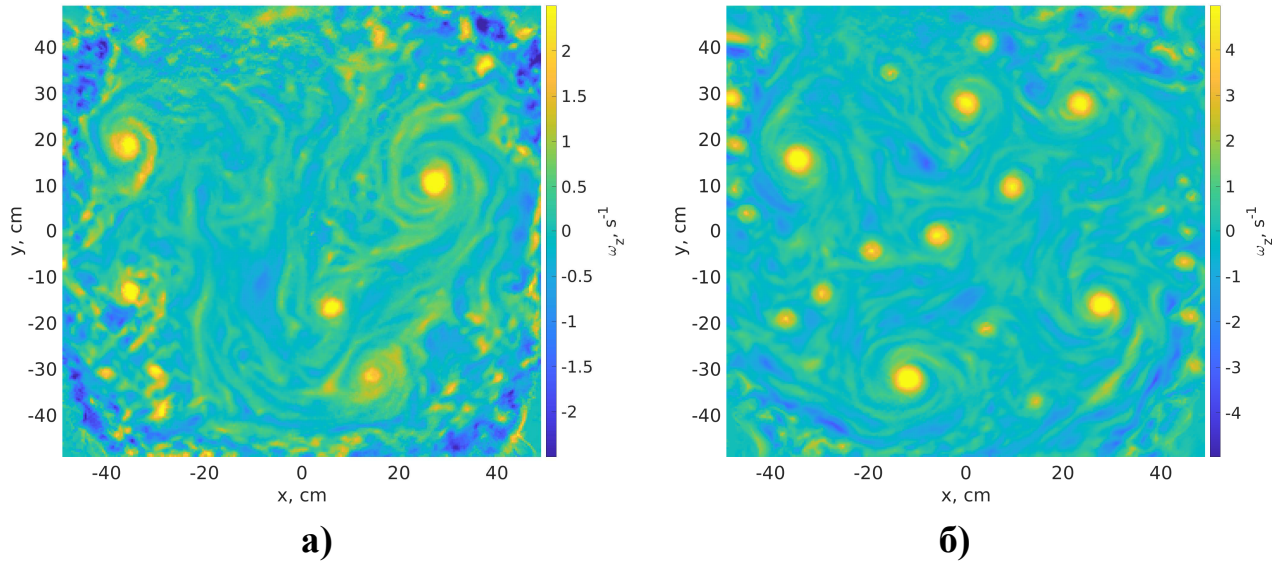


Рисунок 2.4 — Карты распределения завихренности ϖ_z^V геострофического течения для а) низкой (0.12 Гц) и б) высокой (0.72 Гц) скоростей вращения Ω_0 куба [64]. Жёлтый цвет соответствует циклоническому движению, синий — антициклоническому.

Такая картина соответствует свойствам сходимости интеграла по времени в (2.82), поскольку множитель при ϵ/Σ в (2.82) есть коэффициент передачи энергии от турбулентных пульсаций крупномасштабному течению F (2.16). Основной вклад (2.85) в интеграл (2.82) насыщается на временах $\tau \sim 1$, т.е. на тех самых временах $t \sim 1/|\Sigma|$.

2.6 Распространение волновых пакетов в слабо-неоднородном геострофическом течении

Рассмотрим теперь экспериментальную ситуацию, реализованную в нашей работе [64]. Герметично закрытый аквариум кубической формы со стороной 1 м вращался вокруг своей вертикальной оси с угловой скоростью $0.12 \div 0.7$ Гц. Течение возбуждалось вращающимися мешалками, представляющими собой вертикальные оси, к которым были приделаны лопасти с характерным размером $1/k_f = 5$ см. Всего было четыре мешалки, расположенных по углам вдоль вертикальных рёбер куба. Измерение горизонтальных компонент скорости производилось в срединной горизонтальной плоскости.

В объёме наблюдались устойчивые во времени вихревые структуры. Таким образом, инерционные волны создаются у краёв области течения, тогда как само геострофическое вихревое течение распределено по всему объёму. Данная экспериментальная реализация, потому, не вполне описывается построенной выше теорией, в которой предполагается однородное в пространстве распределение мощности возбуждения инерционных волн. Поэтому в этой Пункте мы рассмотрим другую постановку задачи. Положим, что волна в виде волнового пакета возбуждена на периферии аксиально-симметричного геострофического вихря, имея волновое число k_f . Проследим, как будет распространяться волновой пакет в поле течения крупномасштабного вихря. Нам потребуется следить не только за координатой пакета, но и за его волновым вектором, эволюция которого определяет динамику передачи энергии инерционной волны геострофическому течению.

Пренебрегая нелинейным взаимодействием инерционных волн между собой и предполагая, что длина волны инерционных волн мала по сравнению с характерным масштабом квази-двумерного течения, мы можем по теории возмущений описать нелинейное влияние неоднородности квази-двумерного течения $V_\alpha^G(t, \mathbf{r})$ на эволюцию волны, описывающуюся полем скорости $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$. Рассмотрим волновой пакет,двигающийся по траектории $\mathbf{R}(t)$. Уравнение Навье-Стокса, линеаризованное относительно $\mathbf{u}$, и записанное в волновом представлении в окрестности точки $\mathbf{R}$, имеет вид

$$\left(\partial_t + i(\mathbf{V}^G(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{k}) - \sigma_{\beta\alpha} k_\beta \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \right) \mathbf{u} + 2[\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u}] = -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{V}^G)_\mathbf{k} - i\mathbf{k}p - \nu k^2 \mathbf{u}, \quad (2.98)$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, градиент скорости квази-двумерного течения $\sigma_{\beta\alpha}(t) = \partial_\alpha V_\beta(t, \mathbf{R})$ берётся в точке нахождения $\mathbf{R}(t)$ волнового пакета, а индексы $\alpha, \beta = \{x, y\}$. В силу относительной малости длины волны мы ограничились приближением квази-двумерного поля скорости линейным профилем.

Проанализируем уравнение (2.98). Второе слагаемое в круглой скобке в левой части (2.98) обеспечивает перенос волнового пакета со скоростью потока $\mathbf{V}^G(t, \mathbf{R}(t))$. Пусть у рассматриваемого волнового пакета несущий волновой вектор есть $\mathbf{K}$. Сила Кориолиса в (2.98) приводит к движению волнового пакета относительно потока с групповой скоростью, горизонтальные компоненты которой суть

$$v_\alpha^g = -\frac{2s\Omega K_z K_\alpha}{K^3}, \quad (2.99)$$

где s — знак круговой поляризации волны. Скорость движения волнового пакета в горизонтальной плоскости, таким образом, есть

$$\frac{dR_\alpha}{dt} = v_\alpha^g(t) + V_\alpha^G(t, \mathbf{R}). \quad (2.100)$$

Третье слагаемое в круглой скобке в левой части уравнения (2.98) выражает влияние неоднородности на поле волны. Его действие на любое поле, в том числе поле инерционной волны, приводит к изменению волнового вектора $\mathbf{K}$ вдоль характеристики,

$$dK_\alpha/dt = -\sigma_{\beta\alpha}K_\beta, \quad K_z = \text{const.} \quad (2.101)$$

что является обобщением уравнения (2.23), написанного для чисто сдвигового течения. Отметим, что это же слагаемое вместе со слагаемыми в правой части обеспечивают изменение амплитуды волны со временем.

Теперь рассмотрим аксиально-симметричный столбовой вихрь с полем скорости $V_\alpha^G = V^G(r_\perp) e_\alpha^\varphi$, смотри (2.3), где единичный вектор e_α^φ направлен по азимуту, $e_\alpha^\varphi = \epsilon_{\alpha\beta}r_\beta/r_\perp$, а $\epsilon_{\alpha\beta}$ — единичный антисимметричный тензор второго ранга, $\epsilon_{xy} = 1$. Градиент такого поля есть

$$\sigma_{\beta\alpha} = \frac{\Sigma r_\alpha e_\beta^\varphi}{r_\perp} + \frac{V^G}{r_\perp} \epsilon_{\beta\alpha}, \quad (2.102)$$

где локальная сила сдвига Σ определена в (2.6). Второе слагаемое в (2.100) производит перенос волнового пакета вместе с элементом жидкости, движущемся по круговой орбите в вихре, а второе слагаемое в (2.102) производит согласно (2.101) вращение волнового вектора вместе с этим элементом жидкости. Оба этих вклада могут быть исключены переходом в связанную с этим элементом систему координат. Кроме того, перейдём в цилиндрические координаты $\{r_\perp, \varphi, z\}$ и будем рассматривать волну как пакет только в радиальном направлении. По угловой переменной воспользуемся однородностью задачи, благодаря которой сохраняется аксиальное число $m = RK_\varphi$, где R — текущее расстояние от волнового пакета до оси вихря. Система уравнений (2.100, 2.101) приобретает вид

$$\frac{dK_{r_\perp}}{dt} = -\Sigma K_\varphi - \frac{K_\varphi}{K_{r_\perp}} \frac{dK_\varphi}{dt}, \quad \frac{dK_\varphi}{dt} = -K_\varphi v_{r_\perp}^g, \quad \frac{dR}{dt} = v_{r_\perp}^g = -\frac{2s\Omega K_z K_{r_\perp}}{K^3}, \quad (2.103)$$

где локальная скорость вращения Ω задаётся выражением (2.10). Второе уравнение в уравнении на $K_{r_\perp}$ в (2.103) появилось в следствие криволинейности цилиндрических координат: если бы отсутствовал сдвиг, $\Sigma = 0$, то абсолютное

значение волнового вектора должно было бы оставаться неизменным при смещении волнового пакета, т.е. при изменении R . Первое же слагаемое в уравнении на $K_{r_\perp}$ в (2.103) соответствует уравнению движения вдоль характеристики в чисто сдвиговом течении (2.23). Исключив из системы уравнений (2.103) время, получим

$$K_z d\left(\frac{1}{K}\right) = -\frac{sm}{2\Omega} \frac{\Sigma dR}{R}. \quad (2.104)$$

Как и должно быть для бездиссипативной системы, процесс изменения параметров волны обратим. В пределе большого аксиального числа $m \gg 1$ и малой амплитуды изменения угловой скорости вращения, $\delta(V^G/r_\perp) \ll \Omega$, уравнение (2.104) может быть проинтегрировано до вида

$$\tilde{\omega} + K_\varphi V^G = \omega, \quad \tilde{\omega} = \frac{2s\Omega K_z}{K}, \quad (2.105)$$

который выражает собой эффект Доплера: $\tilde{\omega}$ есть частота волны во вращающейся системе координат с угловой скоростью V^G , а ω — частота колебаний волнового поля в лабораторной системе координат, которая остаётся неизменной вследствие однородности задачи по времени. Уравнение (2.105) имеет общий характер и должно быть верно при любых числах m и амплитудах изменения $\delta(V^G/r_\perp)$ вдоль координаты $r_\perp$ (однако число Россби по-прежнему мало, $\Sigma/2\Omega \ll 1$). Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K^u} + \frac{sm}{2\Omega K_z} \left(\frac{V^G(R_u)}{R_u} - \frac{V^G(R)}{R} \right), \quad (2.106)$$

где R_u — расстояние до оси, а волновое число было равно $K^u \sim k_f$. Для удобства дальнейших рассуждений примем, что R_u выбрано так, что $V^G(R_u) = 0$.

Если второе слагаемое в правой части (2.106) достаточно большое по амплитуде, то волна не может распространиться ближе некоторого расстояния до оси. В зависимости от знака этого слагаемого, произойдёт либо отражение, либо поглощение волны. Рассмотрим эти два варианта более подробно.

Поглощение волн. Рассмотрим сперва случай

$$s\Omega K_\varphi K_z V^G > 0. \quad (2.107)$$

Тогда на некотором расстоянии R_* до оси вихря абсолютная величина K волнового вектора согласно (2.106) обращается в бесконечность, $K(R \rightarrow R_*) \rightarrow \infty$:

При этом частота волны $\tilde{\omega}$ (2.105) в системе координат, связанной с движущимся элементом жидкости, обращается в нуль. Иными словами, волновое движение останавливается в критическом слое цилиндрической формы, при $r_{\perp} = R_*$. Вязкость, устанавливающая малую, но конечную диссипацию, приводит к необратимому исчезновению волны и передаче её энергии квази-двумерному течению. Покажем, что поглощаемое волновое движение производит именно положительную работу над вихревым течением. Поскольку групповая скорость (2.103) волны должна иметь отрицательную радиальную компоненту для того, чтобы волна распространялась к оси вихря из области периферии, $v_{r_{\perp}}^g < 0$, мы приходим к неравенству $K_{r_{\perp}} K_{\varphi} V^G > 0$. Согласно общему выражению (2.78) для ρ касательного напряжения Рейнольдса $\langle u_{\varphi} u_{r_{\perp}} \rangle$ (2.8), знак $\tau = \langle u_{\varphi} u_{r_{\perp}} \rangle$ совпадает со знаком $-K_{\varphi} K_{r_{\perp}}$. Это означает, что знак турбулентного потока момента импульса в радиальном направлении $J^{\tau}(r_{\perp}) = r_{\perp}^2 \tau$ противоположен знаку $V^G(r_{\perp})$. Ни импульс, ни энергия не передаются от волны медленному течению, пока не происходит поглощения волны. Это можно было бы непосредственно показать, написав волновое уравнение на поле скорости в воле, в котором сохранения аналога вероятности в квантовой механике соответствует сохранению момента импульса. Таким образом, поток импульса имеет вид $J^{\tau} \propto -V^G \theta(r_{\perp} - R_*)$ включая знак. Момент сил $\mathcal{T}$, действующий со стороны волны на вихревое течение, таким образом, равен $\mathcal{T} = -\partial_{r_{\perp}} J^{\tau} \propto V^G \delta(r_{\perp} - R_*)$ включая знак, то есть, действительно, совершает положительную работу над течением. Отметим также, что знаки V^G и Σ совпадают, поэтому неравенство (2.9) оказывается выполненным. Для того, чтобы поглощение волны произошло, амплитуда вихревого течения должна быть достаточно сильной. Предположим, что вихревое течение на его периферии равно нулю, $V^G(R_u) = 0$. Тогда из (2.106) получаем, что поглощение произойдёт, если существуют такие $r_{\perp}$, что

$$\frac{V^G(r_{\perp})}{r_{\perp}} > \frac{\omega}{m}. \quad (2.108)$$

При этом период модуляции волны $2\pi R_u/m$ в аксиальном направлении на расстоянии R_u от оси вихря должен быть не меньше чем длина волны $2\pi/K^u$ в этой области, $R_u/m > 1/K^u$.

Описанное поглощение волны математически почти эквивалентно поглощению внутренней волны горизонтальным течением с вертикальным сдвигом в стратифицированной жидкости, см. [39]. Отличиями нашей задачи являются, во-первых, аксиальная симметрия задачи, и, во-вторых, отсутствие перемешивания,

которое осуществляется турбулентным течением в стратифицированной жидкости.

Отражение волн. Если знак в (2.107) противоположен, то, наоборот, при приближении к оси вихря волнового пакета волновое число K будет уменьшаться и достигнет минимума $K_{min}(R) = \sqrt{m^2/R^2 + K_z^2}$ в некоторой точке R_t . Ближе этой поверхности решения для волнового вектора $\mathbf{K}$ нет, т.е. волна должна отразиться и уйти обратно на периферию вихря. Полный поток момента импульса в радиальном направлении J^r , связанный с падающей и отражённой волнами, равен нулю. Приходим к тому, что уравнение (2.106) содержит в себе селекцию поляризации, которая определяет знак спиральности волны. Отметим, что отражение внутренних волн от горизонтального течения со сдвигом также приводит к их отражению, которое означает их локализацию в определённой области жидкости, называемую захватом (trapping), см. например обзор [160].

В результате мы показали, что происходит селекция волн: поглощаются только волны, несущие момент импульса, совпадающий с моментом импульса вихря, а волны с противоположным моментом импульса отражаются. Теперь сделаем оценки, удобные для сравнения с экспериментальными данными. В левой части (2.108) мы можем положить $V^G \sim V_{rms}$, где V_{rms} — среднеквадратичное значение скорости. Кроме того, примем радиус критического слоя R_* порядка радиуса вихря, $R_* \sim R_u$. В правой части положим $m \sim K^u R_u$, а само волновое число на периферии $K^u \equiv k_f$. В результате условием достижения необратимости окажется превышение характерной амплитудой скорости геострофического течения характерного значения фазовой скорости инерционных волн:

$$V_{rms} \gtrsim \Omega_0/k_f. \quad (2.109)$$

Условие (2.109) можно интерпретировать и так: время R_u/v^g нахождения волнового пакета, распространяющегося с групповой скоростью $v^g \sim \Omega_0/k_f$, в теле вихря, имеющего размер R_u , должно быть не меньше характерного времени $1/\Sigma \sim R_u/V^G$, за которое происходит поглощение волны:

$$k_f R_u \gtrsim 1/R_o. \quad (2.110)$$

В нашей работе [64] макрочисло Россби определялось как $Ro_M = k_f V_{rms}/2\Omega_0$. Из вышеприведённых рассуждений следует, что при превышении макрочислом Россби некоторого порогового значения, $Ro_M > Ro_M^*$, режим

турбулентного геострофического течения должен изменяться. На Рисунке 2.4 представлены карты пространственного распределения вертикальной завихренности ϖ_z^V при относительно малой и относительно большой скоростях вращения Ω_0 . Эти пространственные распределения являются репрезентативными примерами двух режимов течения. В первом режиме (при низких скоростях вращения) циклонов меньше, их количество составляет $4 \div 7$ штук, а размер циклонов больше. Во втором режиме (при высоких скоростях вращения) циклонов больше, их количество составляет $10 \div 14$ штук, а их размер, соответственно, меньше. Переход между режимами происходит при пороговом значении макрочисла Россби $Ro_M^* \approx 0.1$.

Дальнейшее сравнение нашей теории с экспериментальными данными нашей работы [64] для медленных скоростей вращения проводится нами в Пункте 3.4.5 после получения теоретических предсказаний для радиальных профилей вихрей. Здесь обсудим особенности структуры вихрей при быстрых скоростях вращения. Для этого отметим, что микрочисло Россби, определяющееся как отношение завихренности в сердцевине ядра (радиус сердцевины определялся как расстояние, на котором завихренность спадает в 2 раза от своего максимума, и составлял ≈ 2.3 см) нормированное на $2\Omega_0$, изменялось слабо, в пределах $1.4 \div 1.6$. Это означает, что последнее слагаемое в круглой скобе в (2.106) при всех скоростях вращения достигало приблизительно одного и того же значения. Это означает, что при быстрых скоростях вращения куба поглощение инерционных волн происходит в основном в сердцевине вихря, так что она раскручивается, тогда как тело вихря, в котором с основным сосредоточена кинетическая энергия, содержит противоположный знак завихренности. (Отражение волн, несущих противоположный знак момента импульса, происходит в любом случае за счёт центробежного потенциала.) В результате полная циркуляция, связанная с вихрём, оказывается относительно малой, т.е. вихрь оказывается в значительной мере “изолированным” в терминах работы [161].

2.7 Заключение

Для существования когерентного вихря необходимо установление отрицательной турбулентной вязкости, что математически выражается совпадением

знаков у локального значения силы сдвига Σ в дифференциальном вращении и тангенциального напряжения Рейнольдса $\tau = \langle u_{r\perp} u_\varphi \rangle$, смотри (2.9). Отрицательная турбулентная вязкость компенсирует действие молекулярной вязкости или, как будет обсуждаться в следующей Главе 3, трения о дно — диссипативные процессы стремятся остановить вращение в вихре. В результате момент сил, приложенный к области внутри выделенного соосного вихрю цилиндра, оказывается равным нулю, смотри (2.8).

Если турбулентные пульсации, возбуждённые на фоне когерентного вихря, полагать результатом действия некоторой силы, затрачивающей мощность ϵ , то для тангенциального напряжения Рейнольдса в области отрицательной турбулентной вязкости существует ограничение сверху, $\tau = F\epsilon/\Sigma$, где $F < 1$. Множитель F есть вместе с тем и коэффициент передачи мощности когерентному течению, так что мощность $Q\epsilon = (1 - F)\epsilon$ уходит в тепло посредством вязкой диссипации в турбулентных пульсациях, смотри (2.17). Этим объясняется неравенство $F < 1$.

В пределе малого числа Россби удаётся аналитически рассмотреть динамику турбулентных пульсаций на фоне когерентного течения. Поскольку вращение быстрое, то в главном приближении турбулентная пульсация есть инерционная волна. Её динамику можно исследовать в линейном приближении, отбросив нелинейное взаимодействие инерционных волн, смотри (2.25). Распространение инерционной короткой волны на фоне крупномасштабного вихревого течения приводит к тому, что волновой вектор волны смещается в ультрафиолетовую область по характеристике (2.23), определяемой градиентом крупномасштабного течения. Смещение происходит адиабатически, так что сохраняется адиабатический инвариант для волны как осциллятора с медленно меняющейся частотой. В силу особенности закона дисперсии инерционных волн (2.31) сохранение инварианта эквивалентно условию (2.40). Поскольку волновой вектор со временем увеличивается, кинетическая энергия (2.29), запасённая в волне, уменьшается, что означает, что она передаётся вихревому когерентному течению. Отметим, что в пределе малого числа Россби удаётся непосредственно доказать, что $Q = 1 - F$ есть доля энергии, уходящая в тепло в секторе турбулентных пульсаций посредством действия вязкости, смотри (2.84). Эта ‘неиспользованная’ доля мощности мала, $Q \sim (\nu k_f^2/\Sigma)^{1/3} \ll 1$, где k_f — характерный волновой номер турбулентных пульсаций, а ν — кинематическая вязкости, смотри (2.90).

Большинство инерционных волн передают свою кинетическую энергию когерентному течению за время $\sim 1/\Sigma$. В результате напряжение Рейнольдса определяется предшествующим временем $\sim 1/\Sigma$. Но не все моды турбулентного течения отдают свою энергию крупномасштабному вихрю. Моды с определённым значением волнового вектора (2.75), наоборот, отбирают у вихревого течения энергию. Существование таких мод приводит к тому, что полная кинетическая энергия турбулентных пульсаций, вычисленная в рамках линеаризованной динамики (2.25), оказывается расходящимся интегралом по предшествующим временам, если не учитывать вязкое затухание. В пределе малого числа Россби интеграл по времени расходится логарифмически, смотри (2.96, 2.97). Логарифмичность расходимости означает, что вычисление (2.96) не теряет физический смысл, даже если учесть изменение обрезки интеграла вследствие нелинейных эффектов и эффектов, связанных с неоднородностью градиента течения в вихре. Кинетическая энергия турбулентных пульсаций оказывается того же порядка, что и радиально-азимутальная компонента напряжения Рейнольдса. В двумерной ситуации аналогичная расходимость имеет степенной характер, смотри Пункт 2.4.3, что делает соответствующее вычисление средней кинетической энергии турбулентных пульсаций нефизическим. Кинетическая энергия турбулентных пульсаций определяется медленными крупномасштабными модами, которые не описываются в рамках локального приближения, и оказывается существенно больше напряжения Рейнольдса, смотри работы [148; 159; 162]. При этом напряжение Рейнольдса определяется предшествующим отрезком времени порядка $\sim 1/\nu k_f^2$, что значительно превышает время $1/\Sigma$.

Мы рассмотрели задачу о влиянии геострофического течения на инерционные волны в другой постановке — когда на фоне аксиально-симметричного вихревого течения распространяется волновой пакет, локализованный в радиальном направлении. Аксиальная симметрия и однородность задачи по времени позволяют установить инвариант (2.105), означающий выполнение эффекта Доплера. В дифференциальной форме этот эффект эквивалентен установленному ранее движению волнового вектора вдоль характеристики (2.23), см. (2.103). Мы проследили, что те волны, которые несут момент импульса, имеющий тот же знак, что и направление вращения в вихре, поглощаются вихрём при достаточной его интенсивности. Волны с противоположным значением момента импульса отражаются, уходя обратно на периферию вихря. Качественным условием поглощения, т.е. достижения необратимости передачи энергии волной геострофическому те-

чению, является (2.109). Оно состоит в том, что характерная амплитуда скорости геострофического течения должна превышать характерное значения фазовой скорости инерционных волн. Это условие можно интерпретировать и по-другому: время прохождения волны тела вихря должно быть не меньше характерного времени $1/\Sigma$, за которое происходит поглощение волны.

Глава 3. Радиальные профили когерентных геострофических вихрей

3.1 Введение

В предыдущей Главе 2 мы определили радиально-азимутальную компоненту тензора Рейнольдса, выразив её через энергетическую мощность ϵ , развиваемую мелкомасштабным источником, силу сдвига в дифференциальном течении вихря, а также числа Россби и Рейнольдса течения. В результате теперь в этой Главе 3 мы можем найти радиальные профили когерентных вихрей в различных постановках задачи.

В Пункте 3.2 мы находим радиальный профиль когерентного вихря в неограниченном (или периодическом) по вертикали течении в пределе малого числа Россби, что соответствует численным экспериментам [35; 136]. Решением уравнения (2.5) на радиальный профиль азимутальной скорости $V^G(r_\perp)$ в вихре является линейно-логарифмическим, $V^G(r_\perp) \sim \pm \sqrt{\epsilon/\nu} r_\perp \ln(R_u/r_\perp)$, где R_u можно назвать радиусом вихря, а ϵ есть удельная мощность возбуждения мелкомасштабных турбулентных пульсаций. Число Россби для вихря как целого может быть оценено как $Ro_R = \sqrt{\epsilon/\nu}/2\Omega_0$. Найденное решение не носит специфики трёхмерного течения и в равной степени применимо к двумерному когерентному течению, в котором диссипация на крупных масштабах происходит вследствие действия объёмной вязкости. Этим объясняется наблюдение предсказанного нами профиля в численном счёте [63].

Далее мы исследуем, как на профиль вихря влияет конечность числа Россби и наличие горизонтальных (ортогональных оси вращения) границ у течения. Кроме того, мы рассмотрим один из видов крупномасштабного возмущения конденсата в вихре — аксиально-симметричные волны, распространяющиеся в радиальном направлении в предположении, что главным источником поддержания конденсата является мелко-масштабное геострофическое течение.

При конечном числе Россби наблюдается асимметрия между циклонами и анти-циклонами [65], в эксперименте зафиксированная для геострофических вихрей относительно малого размера по сравнению с размером области течения [51; 125; 137]. Циклонами называются геострофические вихри, в которых направление вращения жидкости, индуцированное течением, совпадает с направ-

лением глобального вращения. В циклоне, таким образом, скорость локального вращения жидкости возрастает. Соответственно, в антициклонах эти направления противоположны, так что локальная скорость вращения жидкости снижается. Под асимметрией понимается как разный радиальный профиль скорости в циклонах и антициклонах, так и преобладание циклонов по количеству при малом но конечном числе Россби. Качественное объяснение асимметрии состоит в том, что ослабление локального вращения в антициклоне приводит к ослаблению тенденции к установлению обратного каскада внутри него. Упомянем экспериментальные работы по измерению радиального профиля геострофических долго-живущих вихрей [33; 128]. Геострофические вихри в этих экспериментах имели размер, значительно меньше раше размера системы, но оставались стабильными на временах десятков времён их собственного оборота.

В пределе неограниченно малого числа Россби разницы между циклонами и анти-циклонами нет, поскольку поправка к локальному вращению, связанная с течением жидкости, пренебрежимо мала. Это показывает как численное моделирование [136], так и наше теоретическое исследование [62]. В работе [65] мы изучаем структуру когерентных геострофических вихрей предполагая, что число Россби является умеренно малым. В этом случае асимметрия циклонов и антициклонов становится заметной. Для того, чтобы изучить эту асимметрию, мы обобщаем подход, предложенный нами ранее в работе [62]. А именно, предполагая, что применимо приближение быстрых возмущений (rapid distortion theory) [41], мы рассматриваем динамику трёх-мерных турбулентных пульсаций на фоне когерентного геострофического течения в линейном режиме. При этом число Россби не предполагается бесконечно малым, то есть, не происходит пренебрежение вращением в вихре по сравнению со скоростью глобального вращения. Турбулентные пульсации создают тензор напряжений Рейнольдса, который поддерживает дифференциальное вращение в вихре. Зная тензор напряжений Рейнольдса, мы устанавливаем уравнение на радиальный профиль азимутальной скорости в вихре и исследуем разницу между циклонами и антициклонами. Пользуясь оценками, следующими из нелинейного уравнения Навье-Стокса, мы устанавливаем критерии, когда когерентные вихри могут существовать.

Асимметрия между циклонами и антициклонами может быть наблюдаема даже при малых числах Россби, если размер системы достаточно велик. В когерентном вихре на глобальное вращение с угловой скоростью Ω_0 накладывается вращение с угловой скоростью $V^G(r_\perp)/r_\perp \sim \pm\sqrt{\epsilon/\nu} \ln(R_u/r_\perp)$, индуцированное

вихревым течением. Полная локальная скорость вращения жидкости $\Omega = \Omega_0 + V^G(r_\perp)/r_\perp$, то есть, локальное число Россби $\text{Ro}(r_\perp) = \Sigma/(2\Omega)$ растёт при приближении к оси антициклона. Но линейно-логарифмический профиль не имеет места на радиусах, меньших чем некоторый радиус сердцевины r_u . На столь близких расстояниях инерционные волны не могут эффективно передавать энергию геострофическому течению, так что профиль $V^G(r_\perp)$ сменяется на линейный твердотельный профиль вращения [62]. Таким образом, можно оценить максимально возможный радиус антициклона из условия $2 \ln(R_{\max}/r_u) \sim 1/\text{Ro}_R$, где Ro_R есть ранее определённое глобальное число Россби (2.18). Это условие гарантирует, что локальное число Россби внутри сердцевины антициклона остаётся меньше единицы, что не даёт развиваться трёх-мерному прямому каскаду энергии. В противном случае, если предположить, что прямой трёх-мерный каскад энергии где-либо осуществляется внутри вихря, можно прийти к противоречию, написав баланс момента сил на соответствующем радиусе. То есть, трёх-мерная турбулентность разрушает антициклон. Ограничение $R_u < R_{\max}$ для антициклона означает, что асимметрия между циклонами и антициклонами реализуется на масштабах $L \gg R_{\max}$, поскольку для циклонов собственное вращение увеличивает амплитуду полного локального вращения, и потому для них нет ограничения по размерам.

В следующей работе [66] мы учли влияние горизонтальных (ортогональных оси вращения) стенок на структуру когерентных вихрей. Вблизи горизонтальных границ течения формируется пограничный слой Экмана, который увеличивает затухание геострофического течения. Толщина слоя Экмана оценивается как $\delta_E = \sqrt{\nu/\Omega_0}$. Отсюда можно сделать оценку для горизонтального масштаба $R_{\nu/\alpha}$, на котором диссипация вблизи горизонтальных границ становится сравнимой с объёмной вязкой диссипацией, $R_{\nu/\alpha} \sim (\nu/\Omega_0)^{1/4} H^{1/2}$, где высота сосуда (его размер вдоль оси вращения) предполагается большой по сравнению с толщиной слоя Экмана, $H \gg \delta_E$. Стандартно в экспериментальной ситуации $H = 50$ см, $\nu = 0.01$ см²/с, $\Omega_0 = 3$ с⁻¹, см. работы [34; 129; 132]. Таким образом, $R_{\nu/\alpha} \sim 2$ см, и потому для геострофических вихрей с радиусом $R_u > R_{\nu/\alpha}$ диссипация близи границ играет определяющую роль для их структуры.

При малых числах Россби геострофический баланс приводит к тому, что геострофическое течение может рассматриваться как однородное вдоль оси вращения вне слоёв Экмана. Рассмотрение слоёв Экмана в линейном приближении приводит к заключению, что в объёме возбуждается вторичное течение. Верти-

кальная компонента вторичного течения меняется линейно от одной границы до противоположной, имеет противоположные знаки вблизи этих границ и интенсивность, пропорциональную завихренности геострофического течения в объёме. Отношение амплитуд вторичного и геострофического течения есть корень из числа Экмана $\sqrt{Ek}$, где само число $Ek = (\delta_E/H)^2$. Внутри же слоёв Экмана этот вертикально направленный поток жидкости формируется за счёт подсоса Экмана — горизонтального течения, ортогонального геострофическому и приблизительно равного ему по интенсивности [163]. У вторичного течения также есть горизонтальная составляющая в объёме, направленная в противоположную сторону течению внутри слоя Экмана. В уравнении на геострофическое течение существование горизонтальной компоненты вторичного течения приводит к возникновению дополнительного слагаемого, которое можно интерпретировать как трение о дно с коэффициентом $\alpha = 2\sqrt{Ek}\Omega_0$ [164]. Если течение ограничено только дном, а сверху жидкость имеет свободную поверхность, то коэффициент должен быть уменьшен в два раза. В результате мы приходим к тому, что если у вихря радиус превышает масштаб $R_{\nu/\alpha}$, то он имеет плоский радиальный профиль скорости $V^G = \pm\sqrt{3\epsilon/\alpha}$, как это было установлено для двумерных когерентных вихрей [21; 26].

Кроме того, в нашей работе [66] мы обсуждаем влияние трения о стенки на эффективность передачи энергии от мелкомасштабных турбулентных пульсаций геострофическому течению. Как было показано в [165] для двумерного когерентного вихря, трение о дно может существенно снизить эту эффективность, когда затухание турбулентных пульсаций определяется преимущественно им, а не объёмной вязкостью. Мы проанализировали роль трения о стенки в зависимости от спектрального свойства возбуждающей течения силы, а именно, от соотношения её характерных масштабов по горизонтали и вертикали, а также от соотношения её вертикального масштаба и размера области течения. Эти параметры могут изменяться в зависимости от реализации эксперимента. Например, вертикальный масштаб значительно превышает горизонтальный у возбуждающей силы в случае, когда её происхождение обязано тепловым конвекционными потокам [166; 167]. В этом случае доля геострофического течения в мелкомасштабных турбулентных пульсациях оказывается весьма велика.

В работе [149] мы рассмотрели эволюцию крупномасштабных флуктуаций на фоне когерентного вихря. Исходно задача рассматривалась для чисто двумерного течения. Однако если предположить, что в случае трёх-мерного гео-

строфического когерентного вихря мелкомасштабные турбулентные пульсации также являются только геострофическим течением, то результаты нашего рассмотрения также применимы и в этом случае. Это предположение во многом соответствует выше уже упоминавшейся экспериментальной ситуации [166; 167], где возбуждение течения происходит тепловыми конвекционными потоками.

Мы искали такие течения, которые эволюционируют медленно по сравнению со скоростью локально сдвигового течения Σ в дифференциальном вращении вихря. Поэтому наше исследование остановилось на аксиально-симметричных возмущениях вихревого течения. Эти течения можно рассматривать как возмущения когерентного вихревого течения. В геофизике [163] и физике плазмы (см., например, [168] и ссылки внутри) подобные течения называются зональными. Тангенциальная компонента напряжения Рейнольдса играет роль управляющей силы для таких течений [169]. Мы показываем, что в когерентном течении напряжение Рейнольдса играет роль восстанавливающей силы для этих течений. Это приводит к периодическим колебаниям зональных течений, что наблюдалось в экспериментальной работе [170]. Мы показываем, что зональные течения, которые можно рассматривать как слабые возмущения когерентного течения, в высоко-частотной области являются распространяющимися в радиальном направлении волнами. Мы определяем зависимость закона дисперсии и длины распространения этих волн от радиальной координаты.

Работы автора, опубликованные в журналах ВАК, на основании которых написана эта Глава 3, в порядке их хронологического следования: [62], [65], [66], [64], [149].

3.2 Радиальный профиль вихря в пределе малого числа Россби

В результате проведённых вычислений мы установили уравнение на радиальный профиль среднего течения в вихре (2.8), в которой неизвестной величиной является тангенциальная компонента тензора напряжения Рейнольдса $\langle u_{r\perp} u_\varphi \rangle$. Далее, мы установили связь (2.84) этой компоненты с мощностью возбуждающей силы ϵ и силой локального сдвига в среднем течении Σ . Таким образом, в пределе малой вязкости (или сильного вихревого течения), когда безразмерное отношение $\gamma \ll 1$, смотри (2.69), мы приходим к замкнутому уравнению на радиальный

профиль вихря

$$\Sigma^2 = \frac{\epsilon}{\nu}, \quad (3.1)$$

где, напомним, азимутальная скорость в вихре $V^G(r_\perp)$ связана с силой сдвига Σ согласно (2.7). Напомним также, что в текущей постановке задачи предполагается, что течение неограниченно по вертикали или на него наложены в этом направлении периодические граничные условия, которые могут быть реализованы в численном счёте. Кроме того, число Россби $Ro = \Sigma/2\Omega$ предполагается малым, $Ro \ll 1$. Решением уравнения (3.1) является $\Sigma = \mp \Sigma_0$, где $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon/\nu}$, а верхний и нижний выборы знака соответствуют циклону и антициклону соответственно. Теперь мы можем проинтегрировать (3.1), получив

$$V^G = \mp r_\perp \int_{R_u}^{r_\perp} dr'_\perp \frac{\Sigma_0}{r'_\perp} = \pm r_\perp \Sigma_0 \ln \frac{R_u}{r_\perp}, \quad (3.2)$$

где R_u — константа интегрирования, смысл которой есть радиус вихря. В рассматриваемом пределе, как мы видим, достигается симметрия между циклонами и антициклонами. Профиль изображён на Рисунке 3.1. Относительная поправка к профилю скорости, связанная с конечностью числа Россби, оценивается как $\Sigma_0/2\Omega$. При представлении экспериментальных данных часто удобно строить распределение вертикальной компоненты завихренности. Из (3.2) следует, что завихренность

$$\omega^G = \frac{1}{r_\perp} \partial_{r_\perp} (r_\perp V^G) = \pm \Sigma_0 \left(2 \ln \frac{R_u}{r_\perp} - 1 \right). \quad (3.3)$$

Необходимым условием для применимости выражения (3.2) является $r_\perp k_f \gg 1$. Однако, приближение вихревого дифференциального вращения сдвиговым течением с прямоугольной геометрией, использованное в (2.22), перестает быть применимым на большем радиусе r_u вследствие распространения инерционных волн. Инерционные волны прежде выходят из сердцевины, чем успевают отдать свою энергию когерентному вихрю. Размер сердцевины вихря r_u может быть оценён как произведение характерного времени $\sim 1/\Sigma$, за которое происходит передача энергии от волны когерентному течению, и групповой скорости инерционных волн $v_g \sim \Omega/k_f$. Это рассуждение приводит к оценке

$$Ro_R \cdot k_f r_u \sim 1. \quad (3.4)$$

которая аналогична (2.109). В сердцевине инерционные волны менее эффективно передают энергию крупномасштабному полю скорости. Волновой пакет при

своём распространении попадает проходит области с существенно разным градиентом крупномасштабного поля скорости. В результате воздействие на волну со стороны когерентного течения оказывается некогерентным, что значительно снижает темп передачи энергии когерентному течению. Соответственно, становится малым и касательное напряжение Рейнольдса $\langle u_{r_\perp} u_\varphi \rangle$. Таким образом, мы ожидаем приблизительно твердотельное вращение жидкости, то есть линейный профиль скорости по $r_\perp$ в области $r < r_u$. Исследование зависимости $V^G(r_\perp)$ в этой области малых $r_\perp$ вне рамок рассмотрения данной работы. Для вычисления тангенциальной компоненты тензора напряжений Рейнольдса на таких малых масштабах требовалось бы развитие теории быстрых возмущений на фоне неоднородного медленного течения. Для примера, подобная теория была развита в [171] для частного случая профиля скорости $V^G \propto 1/r_\perp$ в пределе слабого воздействия турбулентных пульсаций на среднее течение.

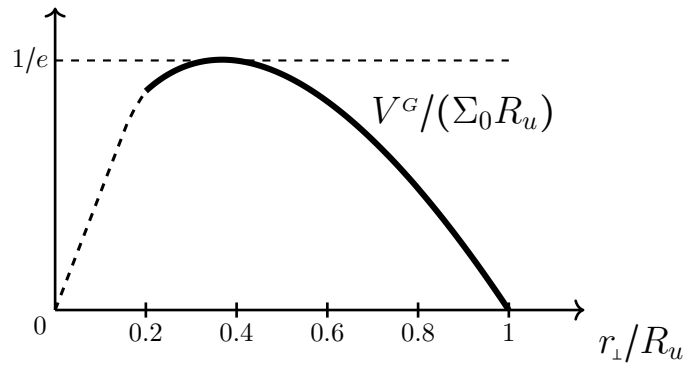


Рисунок 3.1 — Радиальный профиль азимутальной скорости V^G для циклона, когда $\Sigma = -\Sigma_0$, построенный в универсальных единицах. Пунктирная часть графика соответствует области сердцевинки вихря, $r_\perp \lesssim r_u$, и имеет только качественный смысл. Было выбрано $R_u/r_u \approx 5$.

Проведём сравнение полученных результатов с доступными нам данными из численного моделирования [136]. В численном моделировании [136] действительно была наблюдаема симметрия между циклонами и антициклонами. Рассмотренный нами предел в этой работе был назван “вязким конденсатом” именно потому, что в его амплитуда определялась балансом энергии (2.17) и следующим из него соотношением (3.1). В [136] вязкий конденсат устанавливался при числе Россби $Ro_R \approx 0.2$. В системе присутствует два вихря — циклон и антициклон. Размер вихрей R_u был порядка размера L счётной ячейки. Что касается применимости нашей теории к анализу результатов этого численного счёта, то на-

помним, что наша теория применима при выполнении условия (2.110). В работе [136] $Lk_f \approx 25$, то есть требуемое условие можно считать выполненным.

3.3 Влияние конечности числа Россби на профиль когерентных вихрей

В этой секции, основанной на нашей работе [65], мы исследуем эффект, производимый конечностью числа Россби на профиль когерентного вихря. Эффект возникает от того, что при конечном числе Россби коэффициент F передачи энергии турбулентных пульсаций (2.17) становится зависимым от локального числа Россби Ro , которое в свою очередь зависит от радиальной координаты $r_\perp$, $Ro = Ro(r_\perp)$. В общем случае коэффициент передачи энергии F (2.16) зависит и от относительной силы вязкости, определяющейся безразмерным параметром γ (2.69),

$$F = F(Ro, \gamma), \quad Ro(r_\perp) = -\frac{\Sigma(r_\perp)}{2\Omega(r_\perp)}, \quad \gamma(r_\perp) = \frac{2\nu k_f^2}{|\Sigma(r_\perp)|}. \quad (3.5)$$

где локальная скорость вращения Ω определяется (2.10). Число Ro есть локальный аналог глобального числа Россби Ro_R (2.18). Отметим, что в определение Ro (3.5) включён знак — оно положительно для циклона и отрицательно для антициклона. Что касается второго безразмерного параметра, то, если принять оценку $\Sigma \sim \sqrt{\epsilon/\nu}$, то относительная сила вязкости $\gamma \sim (Re_f)^{-2/3} \ll 1$. Напомним, что “априорные” безразмерные числа Россби Ro_f и Рейнольдса Re_f определены в (2.19) и (2.2) соответственно.

3.3.1 Передача энергии когерентному течению

Коэффициент передачи энергии $F(Ro, \gamma)$ не может быть вычислен аналитически при произвольном пространственном профиле корреляционной функции возбуждающей силы. Поэтому мы вычисляем его численно. При этом нам необходимо задать какой-либо конкретный пространственный профиль, в качестве которого мы берём (2.80). Мы рассчитываем на то, что в результате вычислений

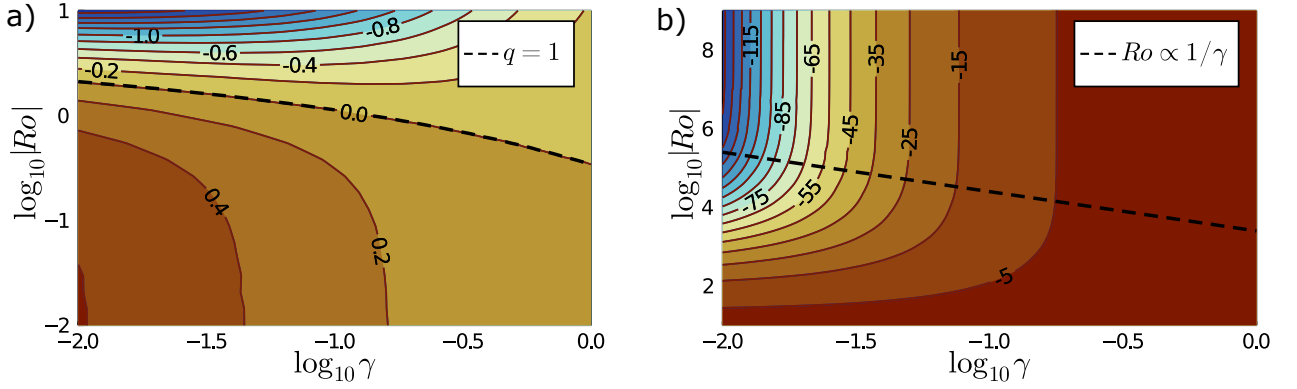


Рисунок 3.2 — Результаты численного расчёта безразмерного тангенциального напряжения Рейнольдса $F(Ro, \gamma) = \Sigma \langle u_\varphi u_{r_\perp} \rangle / \epsilon$ при (a) малых и (b) больших отрицательных числах Россби $Ro = -\Sigma / (2\Omega) < 0$, соответствующих антициклону. На панели (a) пунктирная линия, соответствующая кривой $Q = 1$, совпадает с линией $F = 0$, см. уравнение (2.16). На панели (b) функция $F(Ro, \gamma)$ перестаёт зависеть от параметра Ro над пунктирной линией, что соответствует результатам работы [172].

нами будут наблюдаемы качественные эффекты, не зависящие от выбора конкретной модели, хотя численные параметры этих эффектов, конечно, зависят от модели.

Результаты расчётов показаны на Рисунке 3.2 в случае отрицательного числа Россби Ro (антициклоны) и на Рисунке 3.3 в случае положительного числа Россби Ro (циклоны). Заметим, что, как и должно быть, F становится независимым от Ro в пределе малых чисел Россби [62].

Для того, чтобы подтвердить наши рассуждения о некоррелированности давления и радиальной компоненты скорости $\langle pu_{r_\perp} \rangle = 0$, смотри абзац после Уравнения (2.14), мы независимо численно рассчитали вязкую диссипацию Q согласно (2.70) и $F = -(|\Sigma|/\epsilon) F_{\xi\eta}$ согласно (2.64) с $i = \xi$, $j = \eta$. Проверялось уравнение (2.16), верное только в случае $\langle pu_{r_\perp} \rangle = 0$. Хотя внутри вихря $F > 0$, но поскольку Q и F являются аналитическими функциями Ro и γ , то равенство (2.16) должно выполняться и при отрицательных значениях F . В частности, пунктирная линия на Рисунке 3.2a и на Рисунке 3.3 показывают, что кривая $Q = 1$ совпадает с кривой $F = 0$. Заметим, что наши аналитические вычисления для малого числа Россби подтверждают равенство (2.16), см. выше (2.84). Вероятно, аналитическими выкладками можно было бы доказать равенство (2.16) при любых безразмерных параметрах, однако нам этого сделать не удалось.

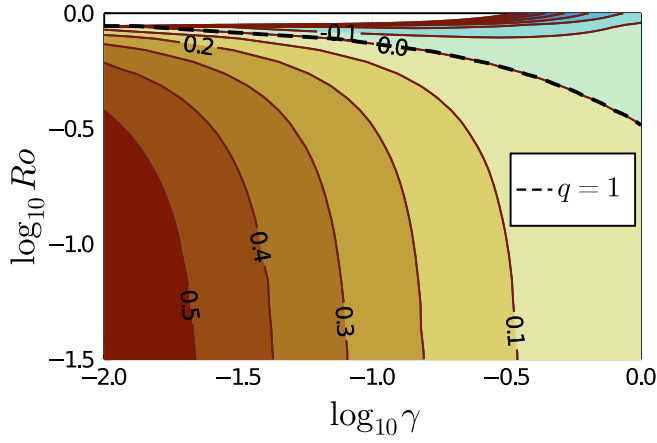


Рисунок 3.3 — Результаты численного расчёта безразмерного тангенциального напряжения Рейнольдса $F(Ro, \gamma) = \Sigma \langle u_\varphi u_r \rangle / \epsilon$ при положительных числах Россби $Ro = -\Sigma / (2\Omega) > 0$, что соответствует циклону. Пунктирная линия, соответствующая кривой $Q = 1$, совпадает с линией $F = 0$, см. (2.16).

3.3.2 Профиль скорости

Теперь приступим к анализу радиального профиля средней скорости $V^G(r_\perp)$ в когерентном вихре. Сначала перепишем уравнение (2.8) в безразмерном виде. Для этого введём безразмерные переменные: локальную силу сдвигового течения σ , локальную скорость вращения ω и расстояние ϱ согласно равенствам

$$\sigma = \frac{\Sigma}{\Sigma_0}, \quad \omega = \frac{2\Omega}{\Sigma_0}, \quad \varrho = \frac{\varrho}{R_u} \quad (3.6)$$

где, напомним, $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon/\nu}$. Тогда уравнения (2.8) и (2.6) перепишутся в виде

$$\sigma^2 = F\left(\frac{\sigma}{\omega}, \frac{2}{(\text{Re}_f)^{3/2}|\sigma|}\right), \quad \sigma = r_\perp \partial_{r_\perp} \omega / 2. \quad (3.7)$$

Это есть нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка на неизвестную функцию $\omega(\varrho)$. Граничным условием является

$$\omega|_{r_\perp=1} = \frac{1}{\text{Ro}_R}, \quad (3.8)$$

которое означает, что $U(R_u) = 0$ согласно (2.7). Заметим, что уравнение (3.7) содержит только один безразмерный параметр Re_f , хотя структура вихря зависит как от Re_f , так и от Ro_R . Таким образом, все решения уравнения (3.7) принадлежат к однопараметрическому семейству кривых, выбор конкретной кривой

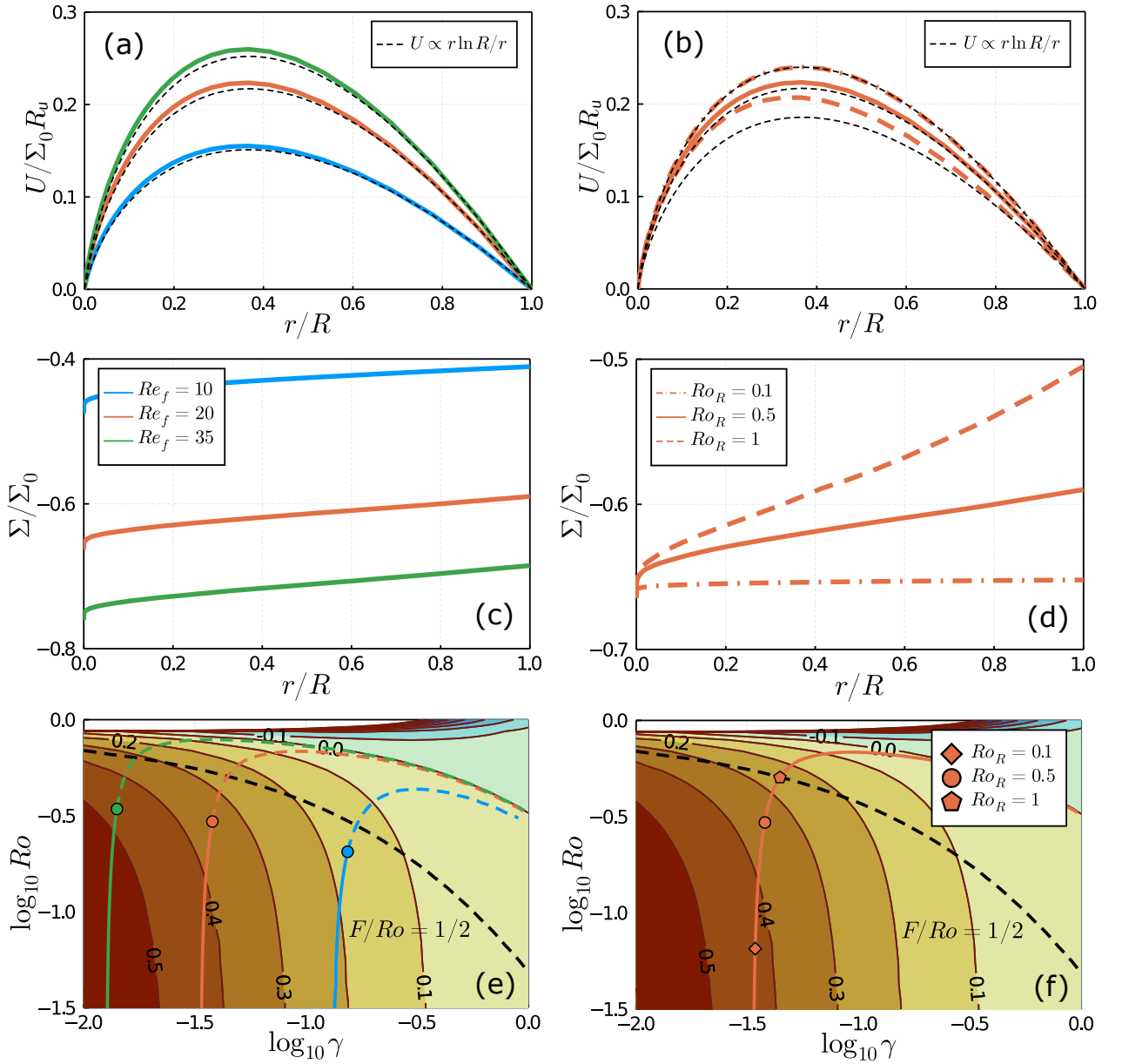


Рисунок 3.4 — Зависимость профиля скорости в циклоне от параметра Re_f (левая панель, $Ro_R = 0.5$) и от параметра Ro_R (правая панель, $Re_f = 20$). (a,b) Азимутальная скорость в циклоне V^G и (c,d) сила сдвига Σ как функции радиальной безразмерной координаты r_1/R_u , $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon/\nu}$. (e,f) Изменение локальных параметров Ro и γ внутри циклона. Маркеры показывают точки, соответствующие границе вихря $r_1/R_u = 1$. Область кривых вниз от маркеров соответствует движению к оси вихря, противоположное направление соответствует периферии вихря (показано штрихованными цветными линиями). Чёрная пунктирная линия соответствует условию $F/Ro = 1/2$ (одна вторая принимает во внимание анизотропию турбулентных пульсаций), выше этой кривой линейный анализ динамики турбулентных пульсаций становится неприменимым.

осуществляется параметром Re_f . Значение второго безразмерного параметра Ro_R определяет позицию вдоль кривой, соответствующую границе вихря или, что тоже самое, ‘начальному’ условию (3.8), см Рисунки 3.4, 3.5 и обсуждение ниже.

3.3.3 Циклоны

В случае циклона в уравнении (3.7) должен быть выбран отрицательный знак перед корнем,

$$\sigma = -\sqrt{F\left(\frac{\sigma}{\omega}, \frac{2}{(Re_f)^{3/2} \cdot |\sigma|}\right)}, \quad \sigma = r_{\perp} \partial_{r_{\perp}} \omega / 2. \quad (3.9)$$

Затем мы численно решаем это дифференциальное уравнение с начальным условием (3.8). Результаты представлены на Рисунке 3.4.

На левой панели показано, как радиальный профиль зависит от числа Рейнольдса возбуждающей течения силы Re_f при фиксированном числе глобальном $Ro_R = 0.5$. Рисунок 3.4а показывает, что при увеличении числа Рейнольдса скорость в вихре возрастает, а радиальная зависимость становится достаточно близкой к линейно-логарифмической (3.2). Это соответствует почти полной независимости локальной силы сдвига $\Sigma(r_{\perp})$ от расстояния $r_{\perp}$ до оси вихря, смотри Рисунок 3.4с и уравнение (3.2). Пунктирные линии на Рисунке 3.4а показывают зависимость $U = -\Sigma^* r_{\perp} \ln(R_u/r_{\perp})$, где $\Sigma^* = \Sigma(R_u)$, пропорциональную зависимости (3.2). Угловая скорость $V^G(r_{\perp})/r_{\perp}$, связанная со вращением вихря, возрастает при приближении к оси циклона; следовательно, число Россби Ro уменьшается. Это проиллюстрировано на Рисунке 3.4е, где изображён фазовый портрет уравнения (3.9) на фоне цветовой карты значений безразмерного тангенциального напряжения Рейнольдса $F(Ro, \gamma)$, полученного выше. Изменяя число Рейнольдса Re_f , мы смещаемся с одной кривой на другую, а маркер на кривой соответствует координате $r_{\perp} = R_u$. Смещение к оси циклона на этой диаграмме соответствует движению вдоль кривой вниз.

На правой панели показано, как поведение системы изменяется при изменении глобального числа Россби Ro_R при фиксированном значении числа Рейнольдса $Re_f = 20$. В этом случае мы остаёмся на одной и той же фазовой

кривой, а изменяется на ней положение начальной точки $r_1 = R_u$, см. Рисунок 3.4f. Чем больше глобальное число Россби Ro_R , тем выше мы на этой кривой и тем больше разница между рассчитанным радиальным профилем скорости и линейно-логарифмическим профилем (3.2), поскольку локальная сила сдвига $\Sigma(r_1)$ становится существенно зависимой от r_1 , см. Рисунки 3.4b,d. Заметим, что для значений безразмерных параметров $Ro_R = 1$ и $Re_f = 20$, значение числа Россби на малых масштабах $Ro_f \approx 0.2 \lesssim 1$, что означает, что глобальная скорость вращения жидкости по-прежнему велика.

В пределе $Ro_R \ll 1$ и $Re_f \gg 1$ возможно решить уравнение (3.9) аналитически, используя асимптотическое выражение (2.93). Решением является линейно-логарифмический профиль $U = -\tilde{\sigma}\Sigma_0 r \ln R/r$, где параметр $\tilde{\sigma}$ является минимальным корнем уравнения

$$\tilde{\sigma} = -\sqrt{1 - \frac{2^{1/3}Q_{1/3}}{Re_f^{1/2}|\tilde{\sigma}|^{1/3}}}. \quad (3.10)$$

В частности, если $Re_f = 20$, то $\tilde{\sigma} \approx -0.64$, что находится в удовлетворительном согласии с соответствующим результатом представленном на Рисунке 3.4d для $Ro_R = 0.1$.

Как и в случае предела малого числа Россби, эволюция турбулентных пульсаций не может быть описана в рамках локального приближения для течения в вихре, использованного нами при расчёте касательного напряжения Рейнольдса, на достаточно близких расстояниях от оси вихря, при $r_1 \lesssim r_u$. Аналогом (3.4) является условие

$$Ro(r_u) \cdot k_f r_u \sim 1. \quad (3.11)$$

Помимо этого, развитая теория не применима в области, где эволюция турбулентных пульсаций уже не описывается в рамках линеаризованного уравнения (2.20), поскольку их нелинейное взаимодействие уже не мало. Нарушение линейного приближения происходит вблизи кривой $F = 0$, поскольку в этой области практически не происходит передачи энергии от турбулентных пульсаций когерентному вихрю, см. уравнения (2.20, 2.17). Для того, чтобы установить условие применимости линейного приближения, следует сравнить скорость нелинейного взаимодействия со скоростью сдвигового члена $|\Sigma|$. Скорость нелинейного взаимодействия Γ_{nl} определяет нелинейным членом $(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}$, опущенным в уравнении (2.20). Поскольку число Россби меньше единицы, эта скорость уменьшается

вследствие осцилляций инерционных волн, так что верхней оценкой для неё является $\Gamma_{nl} \lesssim \langle (\nabla \mathbf{u})^2 \rangle / 2\Omega$, смотри, например, [173]. Некоторое завышение сделанной оценки может быть вследствие того, что комбинация $\langle (\nabla \mathbf{u})^2 \rangle$ включает в себя, помимо прочего, производную скорости поперёк её направления, тогда как такая производная отсутствует в исходном выражении $(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}$. Эта разница в выражениях действительно влияет на результат, поскольку в присутствии сдвигового течения наибольшей компонентой в векторе $\mathbf{u}$ является u^ξ , а корреляционная длина достигает максимума в ξ -направлении и минимума в η -направлении, смотри, например, [73; 174]. Далее, в линейном приближении $\langle (\nabla \mathbf{u})^2 \rangle \sim (1 - F)\epsilon/\nu$, и, используя уравнение (3.13), мы можем переписать условие $\Gamma_{nl} \lesssim |\Sigma|$ в виде

$$F/\text{Ro} \gtrsim 1. \quad (3.12)$$

Соответствующая линия показана на Рисунках 3.4e,f (множитель 1/2 вместо единицы призван компенсировать выше упомянутую завышенную оценку для скорости нелинейного взаимодействия). Над этой линией условие применимости (3.12) нарушено, что означает возникновение тенденции к развитию трёх-мерной турбулентности. В режиме же трёх-мерной турбулентности тангенциальное напряжение Рейнольдса $\langle u_{r_\perp} u_\varphi \rangle$ имеет противоположный знак, соответствующий положительной турбулентной вязкости, что делает существование когерентно вихря невозможным. Таким образом, R' -точка, соответствующая радиусу циклона $r_\perp = R_u$ и обозначенная маркером, должна быть расположена под чёрной пунктирной линией на Рисунках 3.4e,f. Это накладывает ограничение на глобальные параметры течения Re_f , Ro_R , при которых может существовать циклон.

3.3.4 Антициклоны

В случае антициклона нам следует выбрать положительный корень уравнения (3.7):

$$\sigma = \sqrt{F \left(\frac{\sigma}{\omega}, \frac{2}{(\text{Re}_f)^{3/2} \sigma} \right)}, \quad \sigma = r_\perp \partial_{r_\perp} \omega / 2. \quad (3.13)$$

Соответствующий анализ решений этого уравнения представлен на Рисунке 3.5. Заметим, что по сравнению с циклонами при тех же значениях глобальных параметров течения Re_f и Ro_R , максимальное значение азимутальной скорости в

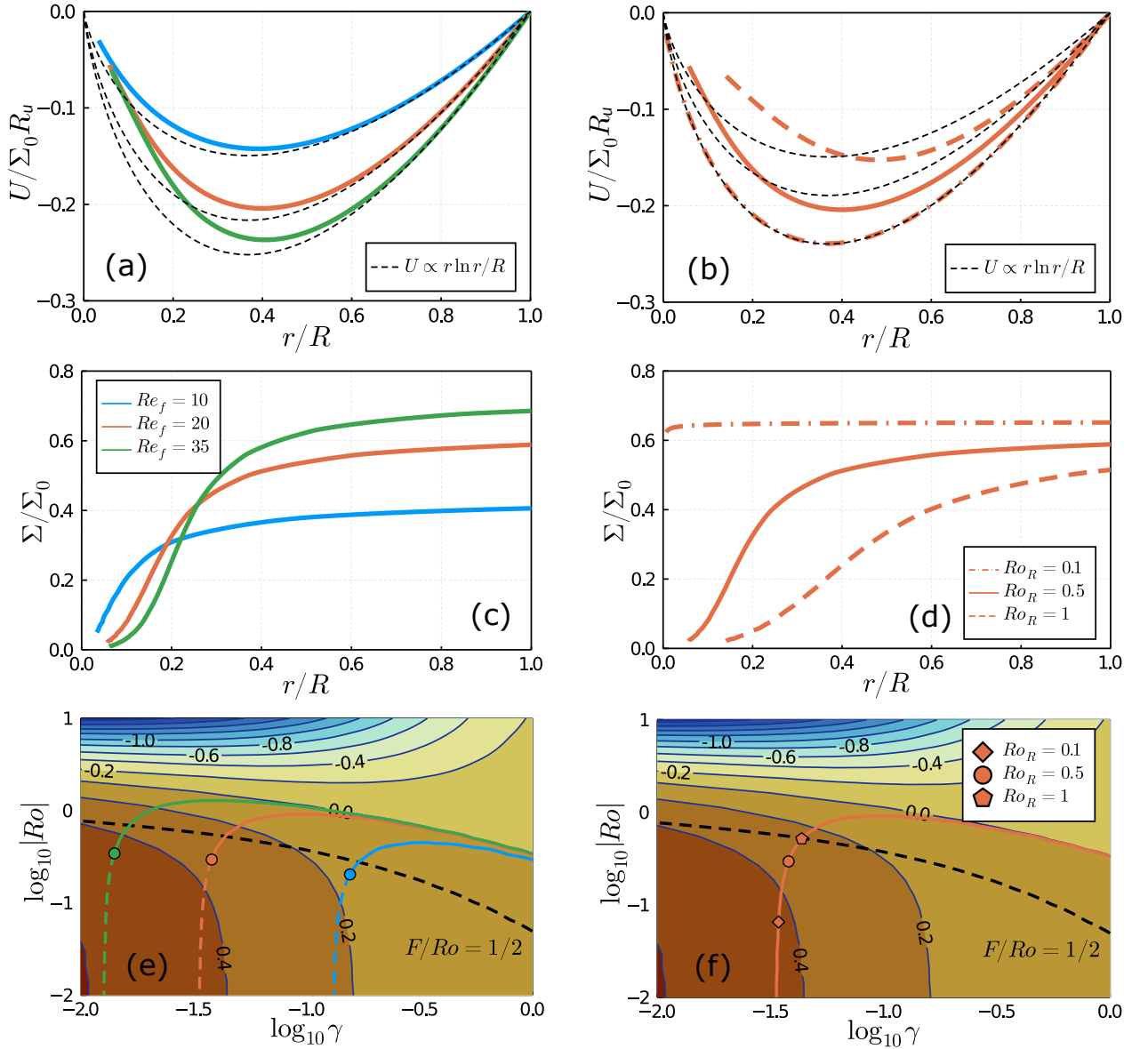


Рисунок 3.5 — Зависимость профиля скорости антициклона от параметра Re_f (левая панель, $Ro_R = 0.5$) и от параметра Ro_R (правая панель, $Re_f = 20$). (a,b) Азимутальная скорость V^θ и (c,d) скорость локального сдвига Σ как функции безразмерной радиальной координаты $r_\perp/R_u$, $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon/\nu}$. (e,f) Изменение локальных чисел Ro и γ внутри вихря. Маркеры показывают точки, соответствующие внешнему краю вихря $r_\perp/R_u = 1$. Область цветных кривых справа-вверху от маркеров соответствует смещению к оси вихря, в противоположном направлении — к его периферии (эти участки цветных кривых показаны пунктирной линией на левой панели). Чёрная пунктирная линия соответствует условию $F/Ro = 1/2$ (одна вторая учитывает анизотропию скорости). Выше этой кривой линейный анализ динамики мелкомасштабных турбулентных пульсаций неприменим.

вихре меньше по абсолютному значению, а положение максимум смещено дальше от оси вихря.

Собственно вращение антициклона $V^G(r_\perp)/r_\perp$ направлено против глобального вращения Ω_0 , и потому теперь абсолютное значение локального числа Россби $|\text{Ro}|$ возрастает при приближении к оси вихря. Соответственно, движение вдоль фазовых кривых, показанных на Рисунках 3.5e,f, происходит в направлении, противоположном направлению в циклонах. Это приводит к более сильной зависимости локальной скорости сдвигового течения $\Sigma(r_\perp)$ от расстояния до его оси $r_\perp$ при тех же значениях глобальных параметров Re_f и Ro_R . В свою очередь это приводит к более ярко выраженному отличию профиля скорости $V^G(r_\perp)$ от линейно-логарифмического профиля (3.2), смотри Рисунки 3.5a-d. Хорошее совпадение наблюдается только для малых значений числа Россби $\text{Ro}_R = 0.1$. В пределе $\text{Ro}_R \ll 1$ и $\text{Re}_f \gg 1$ профили циклонов и антициклонов совпадают с точностью до знака, так что может быть использовано полученное ранее выражение для циклонов (3.10).

При движении вдоль фазовых кривых по направлению, соответствующему направлению внутрь вихря, мы в конце концов приходим в область $F \lesssim \text{Ro}$, в которой нелинейное взаимодействие турбулентных пульсаций является существенным. Это должно приводить к разрушению антициклона вследствие возникновения прямого каскада энергии, см. уравнение (3.12). Единственным способом предотвратить это является условие того, чтобы размер r_u сердцевины вихря (3.11) оказался достаточно большим, так что точка $r_\perp = r_u$ находилась вне области $F \lesssim \text{Ro}$. Поскольку сила сдвигового течения Σ значительно подавлена в этой области, мы должны наложить ещё одно требование для того, чтобы избежать развития трёх-мерной турбулентности в сердцевине вихря. Она подавлена, если вращение в сердцевине достаточно велико, $\text{Ro}_\epsilon = (\epsilon k_f^2)^{1/3} / (2\Omega(r_u)) < 1$ (число Россби Ro_ϵ является локальной версией глобального числа Ro_f). Тогда внешняя сила f возбуждает главным образом инерционные волны, которые затем уходят из сердцевины. Это требование всегда выполняется, если выполнено условие (3.12), поскольку оно может быть переписано в виде $F/(\gamma \cdot \text{Ro}^3) > 1$ при $r_\perp = r_u$. Таким образом, для существования антициклона следует требовать только выполнения условия (3.12) на $r_\perp = r_u$.

Далее, из уравнения (3.13) следует, что отношение между радиусом вихря R_u и радиусом его сердцевины r_u равно

$$\frac{R_u}{r_u} = \exp \left(\int_{R_u}^{r_u} \frac{d \ln(\gamma \cdot Ro)}{2Ro} \right), \quad (3.14)$$

где интеграл берётся вдоль фазовой кривой. Положение R' -точки на фазовой плоскости определяется глобальными параметрами Ro_R и Re_f , смотри положение маркеров на Рисунках 3.5e,f. Теперь предположим для упрощения рассуждений, что r_u' -точка соответствует неравенству $|Ro(r_u)| \ll 1$. Тогда параметр γ остаётся примерно постоянным вдоль фазовой кривой, и мы можем явно выполнить интегрирование в уравнении (3.14):

$$2 \ln \frac{R_u}{r_u} = \frac{1}{Ro(R_u)} - \frac{1}{Ro(r_u)} < \frac{1}{Ro(R_u)}. \quad (3.15)$$

Условие (3.8) предполагает $Ro(R_u) = \sigma(R_u) \cdot Ro_R$, и в пределах $Ro_R \ll 1$, $Re_f \gg 1$ находим, что $\sigma(R_u) = 1$. Этот критерий был сформулирован во Введении.

В общем случае необходимо численно находить значение безразмерной радиальной координат $\varrho_{nl} = r_{nl}/R_u$, которая соответствует пересечению между чёрной пунктирной линией (3.12) и фазовой кривой, см. Рисунки 3.5e,f. Заметим, что это значение зависит только от глобальных параметров Re_f и Ro_R , то есть $r_{\perp nl} = r_{\perp nl}(Re_f, Ro_R)$. Далее, как обсуждалось выше, должно выполняться неравенство $r_u \geq r_{nl}$. Используя уравнение (3.11), мы приходим к

$$R_u < R_{max} = \frac{1}{k_f} \max_{r_{\perp nl} \leq r_{\perp} \leq 1} \frac{1}{r_{\perp} Ro(r_{\perp})}. \quad (3.16)$$

Величина R_{max} должна быть вычислена численно для конкретных значений Ro_R и Re_f . Для обсуждаемой области параметров максимум достигается в точке $r_{\perp} = r_{\perp nl}$, которая соответствует $r_u = r_{nl}$. В частности, для значений $Re_f = 20$, $Ro_R = 0.5$ находим, что $k_f R_{max} \sim 5$, а для значений $Re_f = 20$ и $Ro_R = 0.1$ получаем $k_f R_{max} \sim 2.6 \times 10^3$. Если размер системы L существенно превышает R_{max} , то следует ожидать существенной разницы между циклонами и антициклонами, поскольку размер циклонов ограничен только размером системы.

3.3.5 Выводы

Мы рассмотрели когерентный вихрь, являющийся результатом развития обратного каскада в конденсат, в области параметров, характеризующейся глобальным малым числом Россби $Ro_R \lesssim 1$ (2.18) и большим числом Рейнольдса $Re_f \gtrsim 10$ (2.2). В пределе $Ro_R \ll 1$ радиальные профили циклонов и антициклонов совпадают с точностью до знака, $V^G(r_\perp) = \mp \tilde{\sigma} \Sigma_0 r_\perp \ln(R_u/r_\perp)$ (3.2), где R_u есть радиус вихря, $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon/\nu}$ есть глобальная константа, а $\tilde{\sigma}$ определяется уравнением (3.10). При конечном же значении числа Россби обнаруживается определённой разнице между циклонами и антициклонами. Качественно разница заключается в том, что максимум абсолютного значения скорости $|V^G(r_\perp)|$ смещается к центру в циклонах и к периферии в антициклонах. При тех же значениях глобальных параметров, величина максимума $|V^G(r_\perp)|$ больше в циклонах, чем в антициклонах.

Когерентные вихри могут существовать только если выполнено условие (3.12) на границе вихря, при $r_\perp = R_u$, что накладывает ограничение на допустимые значения глобальных чисел Re_f (2.2) и Ro_R (2.18). Индуцированное вихревым течением вращение с угловой скоростью $V^G(r_\perp)/r_\perp$ в циклонах добавляется к глобальному вращению Ω_0 , так что выполнение условия (3.12) в точке $r_\perp = R_u$ гарантирует, что оно является выполненным и везде внутри вихря, то есть в области $r_\perp < R_u$. В случае антициклона индуцированное вращение вычитается из глобального вращения, так что движение внутрь вихря соответствует движению вдоль фазовых кривых на Рисунках 3.5e,f происходит в противоположном направлении, нежели в случае циклона. Это накладывает дополнительно ограничение на существование антициклонов — должно быть выполнено неравенство (3.12) на границе сердцевин вихря, размер которой r_u главным образом определяется масштабом накачки, смотри уравнение (3.11). Это условие приводит к тому, что размер антициклона R_u ограничен сверху величиной R_{max} , которая зависит от глобальных безразмерных параметров течения Re_f и Ro_R , смотри уравнение (3.16). Мы предсказываем, что если размер области течения L значительно превышает R_{max} , то размеры циклонов и антициклонов также могут существенно различаться. Следует, однако, помнить, что выражение (3.12) является только оценкой, а точный критерий должен быть получен либо путём численного моделирования, либо экспериментально. Кроме того, наша теория применима, только

если применимо локальное приближение для описания динамики мелкомасштабных турбулентных пульсаций, то есть когда $Ro_R \cdot k_f R_u \sim Re_f \sqrt{Ro_f} \cdot k_f R_u \gg 1$.

3.4 Учёт влияния горизонтальных границ течения

Рассмотрим роль горизонтальных стенок, ограничивающих течение. Будем как и прежде предполагать, что жидкость как целое вращается вокруг оси Oz с постоянно угловой скоростью $\Omega_0 = (0, 0, \Omega_0)$, для определённости мы будем считать $\Omega_0 > 0$. Подчеркнём, что границы течения вращаются с той же угловой скоростью. Нижняя граница течения совпадает с плоскостью $z = 0$. Высота сосуда H , так что нижняя граница лежит в плоскости $z = H$.

3.4.1 Слой Экмана

Сперва напомним общие свойства слоя Экмана, формирующегося вблизи границы течения, ортогональной оси вращения. Детальное описание этого феномена можно найти, например, в учебнике [163].

Мы рассматриваем медленную компоненту течения $\mathbf{V}$, главный вклад в которое даёт геострофическое течение $\mathbf{V}^G = (V_x^G, V_y^G, 0)$, так что далеко от горизонтальных границ $\mathbf{V}$ в основном направлено по горизонтали. В пределе малого числа Россби в уравнении (2.1) главными членами являются $2[\Omega_0 \times \mathbf{V}^G]$ в левой части и $-\nabla p$ в правой части, так что мы приходим к уравнению на геострофический баланс:

$$2[\Omega_0, \mathbf{V}^G] \equiv \begin{pmatrix} -2\Omega_0 V_y^G \\ 2\Omega_0 V_x^G \\ 0 \end{pmatrix} = -\nabla p. \quad (3.17)$$

Это уравнение может быть удовлетворено, поскольку поле скорости $\mathbf{V}^G$ является бездивергентным, $\partial_x V_x^G + \partial_y V_y^G = 0$, так что его можно параметризовать функцией тока:

$$V_\alpha^G = \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\beta \psi, \quad p = p_0 - 2\Omega_0 \psi, \quad (3.18)$$

где p_0 — константа интегрирования. Также следствием уравнения (3.17) является независимость геострофического течения от z -координаты.

Будем обозначать отличие медленного течения от геострофического за $U = V - V^G$ и называть эту часть медленного течения вторичным течением. Однородность медленного течения V по вертикали нарушается вблизи границы, поскольку на самой границе скорость должна быть равна нулю вследствие условия прилипания. В слое, называемом слоем Экмана, амплитуда скорости снижается до нуля от своего значения в объёме. В слое Экмана существенную роль играет вязкий член в уравнении (2.1). Мы будем считать толщину слоя Экмана малой по сравнению с характерным горизонтальным масштабом геострофического течения V^G . Поэтому, исследуя свойства слоя Экмана, мы будем считать медленное течение V зависящим только от вертикальной координаты, $V = (V_x(z), V_y(z), 0)$. Уравнение (2.1) с удержанными тремя ведущими членами имеет вид

$$2[\Omega_0, V] = -\nabla p + \nu \partial_z^2 V. \quad (3.19)$$

Вертикальная компонента этого уравнения есть $\partial_z p = 0$, то есть давление не зависит от z -координаты и в слое Экмана. Решением уравнения (3.19) с граничными условиями $V = 0$ при $z = 0$ и $V \rightarrow V^G$ при $z \rightarrow \infty$ является

$$\begin{aligned} U_x &= V_x - V_x^G = -e^{-z/\delta_E} (V_x^G \cos(z/\delta_E) + V_y^G \sin(z/\delta_E)), \\ U_y &= V_y - V_y^G = e^{-z/\delta_E} (V_x^G \sin(z/\delta_E) - V_y^G \cos(z/\delta_E)), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$\delta_E = \sqrt{\nu/\Omega_0} \quad (3.21)$$

есть толщина слоя Экмана. Решение (3.20) называется спиралью Экмана.

Теперь выясним, что происходит, когда геострофическое течение V^G изменяется на масштабе $R \gg \delta_E$ в горизонтальной плоскости. Поскольку, как уже обсуждалось, геострофическое поле скорости V^G является бездивергентным, то условие сохранения потока массы в слое Экмана можно записать в виде

$$\partial_z U_z = -\partial_x U_x - \partial_y U_y. \quad (3.22)$$

Проинтегрируем по вертикали уравнение (3.22) от $z = 0$ до некоторого $z \gg \delta_E$, но $z \ll H, R$, используя граничное условие $U_z = 0$ при $z = 0$ и решение (3.20). Получим, что вертикальная скорость над слоем Экмана

$$U_z^E = \frac{\delta_E}{2} \varpi^G, \quad (3.23)$$

где завихренность геострофического течения

$$\varpi^G = (\partial_x V_y^G - \partial_y V_x^G) \quad (3.24)$$

Таким образом, мы установили, что в объёме жидкости возбуждается некоторое вторичное течение. Согласно (3.23) оно пропорционально завихренности геострофического течения и толщине слоя Экмана. Поток от (или к) границе обеспечивается сжимаемостью горизонтального течения в слое Экмана. Для выяснения свойств этого течения проинтегрируем решение (3.20) по вертикали:

$$\int_0^\infty dz U_\alpha = -\frac{\delta_E}{2} V_\alpha^G + \pi_\alpha, \quad \pi_\alpha = -\frac{\delta_E}{2} \epsilon_{\alpha\beta} V_\beta^G. \quad (3.25)$$

Первое слагаемое в правой части (3.25) есть следствие ослабления геострофического течения внутри слоя Экмана. Более интересно второе слагаемое π_α , которое представляет собой поток, повёрнутый на угол $\pi/2$ относительно геострофического течения V^G . Этот поток является сжимаемым, обеспечивающим появление вертикальной компоненты скорости вне слоя Экмана, $V_z^G = -\operatorname{div} \pi$. Поток π называется подсосом Экмана (Ekman suction). Описанное распределение течения схематично изображено на Рисунке 3.6.

Уже на этом этапе описания можно понять, что влияние слоя Экмана на динамику геострофического течения является существенным для стандартных экспериментальных установок. Для этого надо сравнить поверхностную плотность мощности, которая выделяется в результате вязкого трения в объёме течения и в слое Экмана. Пусть характерным масштабом геострофического течения по горизонтали является R . Тогда мощность, выделяемая в объёме и приходящаяся на единицу площади поверхности Oxy , оценивается как $\sim \nu H (V^G/R)^2$. Мощность, выделяемая в слоях Экмана (их два, вблизи нижней и верхней границы) оценивается как $\sim 2\nu (V^G)^2/\delta_E$. На характерном масштабе

$$R_{\nu/\alpha} = \sqrt{\delta_E H/2} = (\nu/\Omega_0)^{1/4} (H/2)^{1/2} \quad (3.26)$$

эти две мощности равны; на масштабах $R > R_{\nu/\alpha}$ динамику геострофического течения определяет вязкая диссипация в слое Экмана, которую мы также будем называть трением о дно. Для типичных значений $H = 50$ см, $\nu = 0.01$ см²/с, $\Omega_0 = 3$ с⁻¹, смотри экспериментальные работы [34; 129; 132], находим $R_{\nu/\alpha} \sim 2$ см, что совпадает или даже меньше чем радиусы наблюдаемых в этих установках геострофических вихрей.

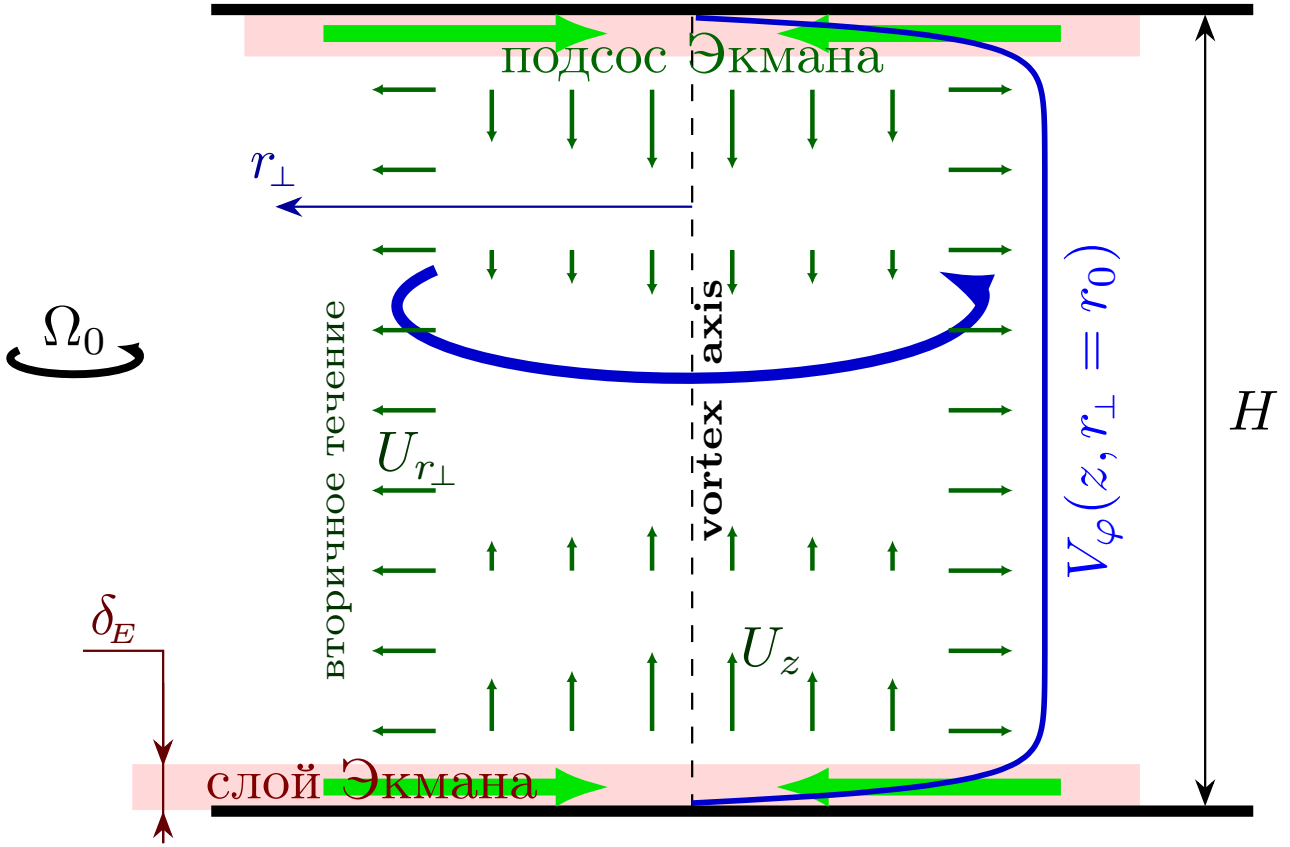


Рисунок 3.6 — Схематическое изображение течения, возникающего в вихрециклоне. Маленькие вертикальные и горизонтальные стрелки изображают вертикальную и радиальную компоненты вторичного течения. В случае антициклона направления этих стрелок, включая стрелки, изображающие подсос Экмана, должны быть изменены на обратные.

3.4.2 Трение о дно

Теперь получим динамическое уравнение на геострофическое течение с учётом возбуждения им вторичных течений. Хотя это можно сделать в общем виде [161; 164], мы ограничимся случаем аксиально-симметричного течения. Главная, геострофическая часть этого течения в цилиндрических координатах $\{r_\perp, \varphi, z\}$ (ось вихря совпадает с осью системы координат) имеет единственной ненулевой азимутальную компоненту V^G . Завихренность геострофического течения ϖ^G определяется первым равенством в (3.3).

Установим теперь распределение вторичного течения в объёме и будем для простоты записи считать, что помимо геострофического аксиально-симметричного вихревого течения в объёме нет другого течения. Азимутальная компонента уравнения Навье-Стокса (2.1) имеет вид

$$\partial_t V^G + U_{r_\perp} (2\Omega_0 + \varpi^G) = \nu \partial_{r_\perp} \varpi^G, \quad \varpi^G = (1/r_\perp) \partial_{r_\perp} (r_\perp V^G), \quad (3.27)$$

где мы посчитали, что производные по z являются пренебрежимо малыми величинами. Для того, чтобы найти $U_{r_\perp}$ компоненту вторичного течения, проинтегрируем уравнение несжимаемости течения

$$(1/r_\perp) \partial_{r_\perp} (r_\perp U_{r_\perp}) + \partial_z U_z = 0 \quad (3.28)$$

по вертикали в области вне слоёв Экмана и воспользуемся выражением (3.23) для вертикальной компоненты вторичного течения снаружи слоёв. В результате получим

$$U_{r_\perp} = \sqrt{\text{Ek}} V^G, \quad (3.29)$$

где мы использовали совпадение для связи ϖ с V^G (3.27) и дивергенции планарной проекции скорости с $U_{r_\perp}$ (3.28), и определили число Экмана

$$\text{Ek} = (\delta_E/H)^2 = \frac{\nu}{\Omega_0 H^2}. \quad (3.30)$$

Заметим также, что из уравнения (3.28) следует, что U_z изменяется линейно вдоль вертикальной координаты. Подставляя уравнение (3.29) в уравнение (3.27), находим

$$\partial_t V^G + \sqrt{\text{Ek}} (2\Omega_0 + \varpi^G) V^G = \nu \partial_{r_\perp} \varpi^G, \quad (3.31)$$

В дальнейшем мы рассматриваем предел малых чисел Россби, так что в круглой скобке в (3.31) следует пренебречь нелинейной поправкой ϖ^G по сравнению с $2\Omega_0$. Член в правой части (3.31) описывает вязкую диссипацию в объёме, а второе слагаемое в левой части происходит из вязкой диссипации в слоях Экмана. Формально это слагаемое можно назвать трением о дно с коэффициентом

$$\alpha = 2\Omega_0 \sqrt{\text{Ek}} = \frac{2\sqrt{\nu\Omega_0}}{H}. \quad (3.32)$$

Уже данное выше определение характерного масштаба $R_{\nu/\alpha}$ (3.26) может быть определено и как масштаб, на котором сравниваются два диссипативных члена, то есть как $V^G = \sqrt{\nu/\alpha}$.

Описанная схема может быть обобщена на любое геострофическое течение не обладающее аксиальной симметрией, см. [164]. Нелинейные поправки становятся существенными при возрастании числа Россби, работы [161; 175] были посвящены анализу этих поправок.

3.4.3 Когерентный вихрь

Последней составной частью нашей модели является внешняя сила f , которая возбуждая мелкомасштабные турбулентные пульсации, передаёт жидкости удельную мощность ϵ . Сначала мы рассматриваем силу, статистика которой изотропна в пространстве, имея корреляционную длину $1/k_f \ll R$, и коротко коррелирована во времени. Тогда, как было показано в Пункте 2.5, спектр возбуждённых волн не имеет выделенного направления, и почти вся мощность ϵ , передаваемая мелкомасштабным турбулентным пульсациям, затем передаётся геострофическому течению. Здесь мы должны обратить внимание, что сделано как предположение о слабой объёмной вязкости, так что мал параметр $\gamma \ll 1$ (2.69), так и предположение о слабом влиянии на инерционные волны трения о границы. Критерий выполнения последнего предположения обсуждается ниже.

Азимутальная компонента уравнения Навье-Стокса (2.1), усреднённого по времени, имеет вид в объёме жидкости (вне слоёв Экмана)

$$\partial_t V^G + \alpha V^G = - \left(\partial_{r_\perp} + \frac{2}{r_\perp} \right) (\langle u_\varphi u_{r_\perp} \rangle - \nu \Sigma), \quad (3.33)$$

По сравнению с (2.5) добавился второй член в левой части уравнения, отвечающий за трение о дно. Мы пренебрегли членом $\partial_z \langle u_z u_\varphi \rangle$, поскольку статистика турбулентных пульсаций не зависит от вертикальной координаты вне слоёв Экмана. Стационарное решение уравнения (3.33) определяет радиальный профиль скорости $V^G(r_\perp)$ в когерентном вихре. В рамках сделанных предположений верно равенство $\langle u_\varphi u_r \rangle = \epsilon/\Sigma$, см. (2.84), для касательного напряжения Рейнольдса. Подставив это равенство в (3.33), получаем уравнение на радиальный профиль скорости в вихре:

$$\alpha V^G = \left(\partial_{r_\perp} + \frac{2}{r_\perp} \right) \left(\nu \Sigma - \frac{\epsilon}{\Sigma} \right), \quad \Sigma = r_\perp \partial_{r_\perp} (V^G/r_\perp). \quad (3.34)$$

Отметим, что уравнение (3.34) инвариантно по отношению к изменению знака $V^G \rightarrow -V^G$, что означает, что циклоны и антициклоны в рассматриваемом пределе малого числа Россби имеют одинаковые профили с точностью до знака. Поэтому ниже мы говорим только о циклонах.

Далеко от оси вихря, на расстояниях $r_\perp \gg V^G$, вязкий член в (3.34), пропорциональный ν , оказывается относительно малым, так что им можно пренебречь. На этой асимптотике решением является плоский профиль скорости [26]:

$$V^G = \sqrt{3\epsilon/\alpha}, \quad \Sigma = -\frac{\sqrt{3\epsilon/\alpha}}{r_\perp}, \quad r_\perp \gg V^G. \quad (3.35)$$

В противоположном пределе $r \ll V^G$ возможно пренебречь членом, пропорциональным α и возникающим вследствие трения о дно. Решением на этой асимптотике является линейно логарифмический профиль

$$V^G = \sqrt{\epsilon/\nu} r_\perp (C_\alpha + \ln(V^G/r_\perp)), \quad r_\perp \ll V^G, \quad (3.36)$$

где константа $C_\alpha \approx 1.168$ была получена нами путём численного решения уравнения (3.34). На близких расстояниях до оси вихря $r_\perp \lesssim 1/(k_f \text{Ro})$, локальное приближение для описания динамики инерционных волн не применимо, см. (3.4). На таких расстояниях профиль скорости является приближённо линейным, что соответствует твердотельному вращению. Профиль скорости в случае выполнения неравенств $1/k_f \text{Ro} \ll R_{\nu/\alpha} \ll R_u$ показан на Рисунке 3.7. Если же трение о дно достаточно сильно, так что $V^G \lesssim 1/(k_f \text{Ro})$, то плоский профиль скорости (3.35) непосредственно переходит в твердотельный профиль, минуя линейно-логарифмическую асимптотику (3.36).

Отметим, что тот же профиль (3.35) был предсказан ранее для двумерного когерентного вихря [21], а затем был и наблюден в численном моделировании [26] и натурном эксперименте [24]. Главным отличием трёх-мерной и двумерной систем является механизм передачи энергии от мелкомасштабных турбулентных пульсаций когерентному течению. В двумерном течении турбулентные пульсации в среднем передают энергию за время $\sim 1/\nu k_f^2$. Поскольку они также испытывают трение о дно, когерентный вихрь может существовать только если выполнено условие $\nu k_f^2 \gtrsim \alpha$ [165]. В трёх-мерной системе подобное ограничение не возникает, поскольку передача энергии от инерционных волн происходит в среднем за более короткое время $\sim 1/\Sigma$. Если высота сосуда достаточно велика, $k_f H \gg 1/\text{Ro}$, то инерционная волна (волновой пакет) не успевает достигнуть нижней и верхней границ течения за то время, то есть, не испытывает трения Экмана. Если

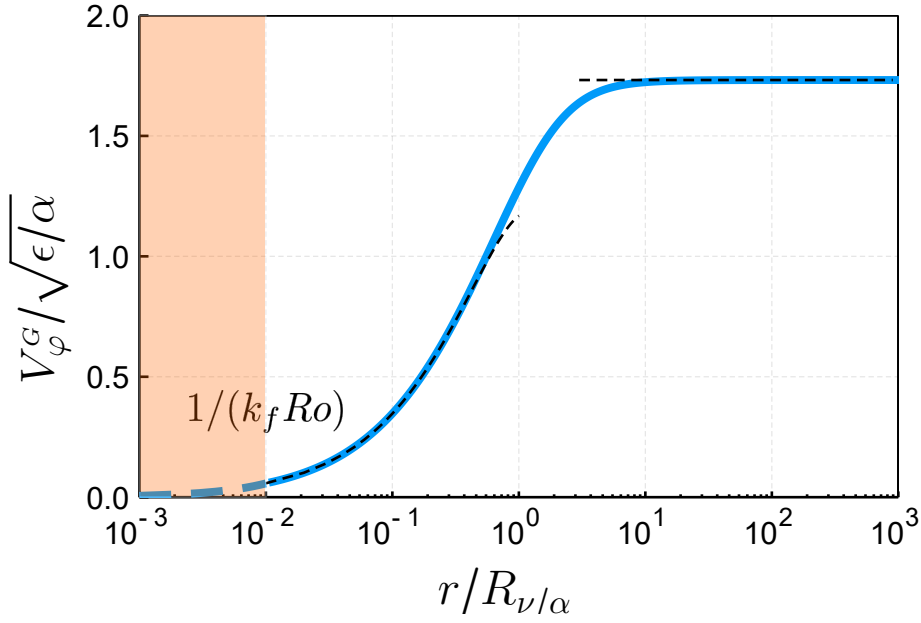


Рисунок 3.7 — Профиль скорости когерентного вихря, полученный в результате численного решения уравнения (3.34). Чёрная пунктирная линия соответствует асимптотическому поведению, описываемому выражениями (3.35) and (3.36). Закрашенная область $r_1 \lesssim 1/(k_f Ro)$ соответствует области сердцевины вихря, где азимутальная скорость соответствует почти твердотельному вращению жидкости.

же выполняется обратное условие $k_f H \ll 1/Ro$, то инерционная волна успевает несколько раз отразиться от верхней и нижней границ за время $1/\Sigma$. В этом случае мы должны потребовать дополнительное условие $\alpha \ll \Sigma$, или $\sqrt{Ek} \ll Ro$, чтобы волна прежде чем затухнуть вследствие трения о дно отдала свою энергию географическому течению. Ниже в Пункте 3.4.6 мы расширяем наше рассмотрение на случай силы с анизотропной статистикой и конечным временем корреляции.

Отметим также, что решение уравнения (3.34) может быть расширено на случай, когда твёрдый вертикальный цилиндр расположен коаксиально внутри вихря, который вращается с произвольной угловой скоростью, по аналогии с тем, как это было сделано для двумерной системы в пределе доминирующего трения о дно [176].

3.4.4 Баланс энергии

Полезно выписать уравнение на баланс энергии, усреднённое по времени. Баланс энергии рассматривался нами ранее в Пункте 2.2.3. Пока будем иметь в виду произвольное значение коэффициента передачи энергии F (2.16). Уравнение (2.11) с добавленным членом, производимым трением о дно, можно переписать в виде

$$\frac{\partial_{r_\perp}(r_\perp J_{r_\perp})}{r_\perp} = F\epsilon - \nu\Sigma^2 - \alpha(V^G)^2, \quad J_{r_\perp} = V^G(\langle u_{r_\perp} u_\varphi \rangle - \nu\Sigma). \quad (3.37)$$

Левая часть (3.37) представляет собой дивергенцию потока энергии $J_{r_\perp}$, направленного по радиусу. Правая часть есть средняя мощность, передаваемая крупномасштабному течению. Она равна средней мощности $F\epsilon$, передаваемой от мелко-масштабных турбулентных пульсаций крупномасштабному течению, за вычетом объёмной диссипации энергии $\nu\Sigma^2$ и диссипации за счёт эффективного трения о дно $\alpha(V^G)^2$. Последняя в действительности происходит внутри слоёв Экмана.

Если профиль скорости определяется объёмной вязкостью, см. уравнение (2.8), то поток J^r равен нулю и мы приходим к локальному в пространстве балансу энергии (2.17) между возбуждающей течение мощностью и объёмной вязкой диссипацией. Если же доминирует трение о дно, профиль скорости определяется уравнением (3.35), поток энергии определяется турбулентными пульсациями и направлен к оси вихря, $J_{r_\perp} = -Fr_\perp\epsilon$. Дивергенция потока равна -2ϵ . В простейшем случае $F = 1$ это означает, что скорость диссипации кинетической энергии внутри вихря в три раза выше чем скорость её восполнения за счёт действия внешней возбуждающей силы. Этот дисбаланс компенсируется за счёт передачи кинетической энергии из областей, внешних для вихря. Таким образом, в этом случае тело вихря не является самодостаточным и необходимо существование периферии вихря, в которой диссипация энергии меньше чем мощность внешней силы. Отметим, однако, что уравнение (3.34) неприменимо в этой области периферии, поскольку аксиальная симметрия течения в ней существенно нарушена.

3.4.5 Сравнение с экспериментальными данными

Вернёмся к обсуждению экспериментальных данных из нашей работы [64], начатому нами в Пункте 2.6, смотри в частности Рисунок 2.4. Наблюдаемые вихри существовали дольше, чем время затухания Экмана $1/\alpha$ (3.32), т.е. вполне могут считаться когерентными (долго-живущими). Как обсуждалось в последнем абзаце Пункта 2.6, наблюдалось два режима геострофической турбулентности. На Рисунке 3.8 приведены графики радиальных профилей циклонов для двух режимов геострофической турбулентности. Характерный масштаб (3.26) $R_{\nu/\alpha} = 3 \div 5$ см.

При относительно низких частотах наблюдается достаточно большая амплитуда течения, так что инерционные волны эффективно поглощались геострофическими вихрями во всём их теле. Действительно, на Рис. 3.8а есть область с почти плоским участком радиальной зависимости средней скорости в вихре $V^G(r_\perp)$, лежащая в области $r_\perp > R_{\nu/\alpha}$, в соответствии с теоретическими оценками (3.35). Мы интерпретируем этот факт так, что волны с разными значениями m , K_z и k_f , см. (2.106), поглощаются на разных расстояниях до оси вихря. В результате объёмная мощность ϵ передачи энергии вихрю оказывается слабо зависящей от расстояния до оси вихря. Развитая здесь теория предсказывает, что в этой области в процессе поглощения волн образуются гармоники с большим волновым числом, что находится в согласии с экспериментальными данными: энергетический спектр ведёт себя как $k^{-2.4}$ на низких частотах вращения, тогда как на высоких скоростях вращения индекс увеличивается до $\simeq -3.3$.

На высоких скоростях вращения, наоборот, волны почти не поглощаются в телах вихрей, поглощение локализовано только в их сердцевинах (сердцевина — область, в которой завихренность достигает не менее половины от её максимума на оси вихря), где существенным оказывается кривизна линий тока в вихре, которая становится порядка волнового числа. В этой области коротко волновое приближение, развитое в Пункте 2.6, уже неприменимо и может рассматриваться только как некоторая оценка. В этой оценке важно, что скорость углового вращения в вихре $V^G/r_\perp$ (2.106, 2.108) имеет узкий пик, ширина которого есть сердцевина вихря. Таким образом, подкрутка вихревого движения (т.е. передача ему момента импульса) происходит только на границе сердцевина вихря. С этим связана особенность радиального профиля вихрей в этом режиме: циркуляция в вихре $2\pi r_\perp V^G$ падает почти в 2 раза вблизи расстояния $r_\perp \approx 15$ см.

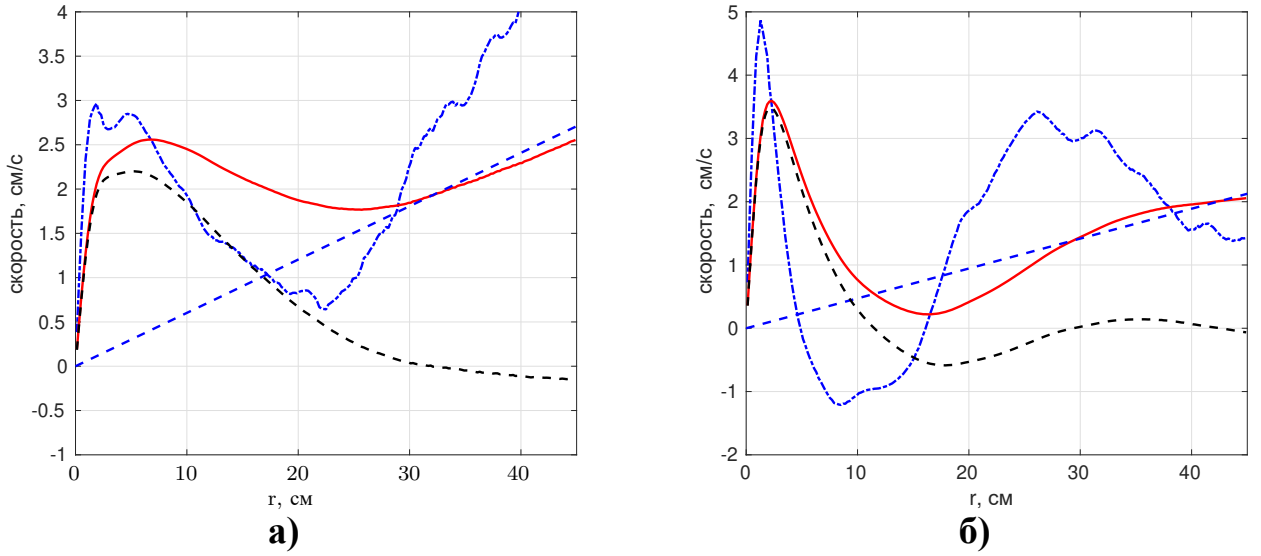


Рисунок 3.8 — Профили азимутальной скорости вихря $V^G(r_\perp)$ (сплошная красная линия), величины $\Gamma'(r_\perp) = r_\perp \cdot \varpi^G$ (штрих-пунктирная синяя линия), величина аппроксимации профиля скорости среднего течения на далёких расстояниях $\bar{\omega} \cdot r_\perp / 2$ (прямая синяя пунктирная прямая), профиль азимутальной скорости с вычтенным профилем скорости среднего течения $V^G(r_\perp) - \bar{\omega} \cdot r_\perp / 2$ (чёрная пунктирная линия). а) Низкая 0.72 Гц, $\bar{\omega} = 0.06 \text{ с}^{-1}$; б) высокая 0.12 Гц, $\bar{\omega} = 0.047 \text{ с}^{-1}$ скорости вращения Ω_0 куба [64].

3.4.6 Анизотропная статистика инерционных волн

В этом пункте мы проводим качественное обсуждение ситуации, когда возбуждаемые инерционные волны, которые являются ‘топливом’ для когерентного течения, имеют анизотропный спектр, у которого проекции волнового вектора k_z и $\mathbf{k}_\perp$ на ось вращения Oz и на плоскость Oxy , перпендикулярную оси вращения, имеют существенно разные характерные значения,

$$k_z \ll k_\perp \approx k_f. \quad (3.38)$$

Такое разделение масштабов возникает, если возбуждающая течение сила $\mathbf{f}$ имеет конечное время корреляции ($\tau_f \gg 1/\Omega_0$) и/или сама имеет такую анизотропию в пространстве. В качестве примера можно привести возбуждение течения вследствие тепловой конвекции, см. [166; 167]. Как и прежде, мы полагаем, что возбуждаемые инерционные волны являются мелкомасштабными в горизонтальном направлении, т.е. $k_f R \gg 1$. Результатом нашего рассмотрения будет критерий на k_z , определяющий, на сколько эффективно соответствующая турбулентная

пульсация передаёт свою энергию крупномасштабному течению. Если только часть возбуждаемого спектра удовлетворяет критерию, то мощность ϵ , которая определяется касательное напряжение Рейнольдса $\langle u_{r\perp} u_\varphi \rangle$, становится только частью затрачиваемой внешней силой f мощности.

Мы прослеживаем динамику кинетической энергии, запасённую в мелкомасштабном вихре. Эта энергия уменьшается вследствие передачи энергии крупномасштабному течению и процессам диссипации. Полная кинетическая энергия, запасённая в мелкомасштабных вихрях, остаётся неизменной благодаря действию внешней силы f . Если пренебречь процессами диссипации, которые относительно слабы, то система станет консервативной, что означает, что уменьшение кинетической энергии мелкомасштабного вихря сопровождается увеличением на ту же величину кинетической энергии крупномасштабного вихря. Математическое описание динамики кинетической энергии было проведено в Пункте 2.4.3, см., в частности, (2.74). Время передачи энергии следует сравнить с временем, на котором становятся существенными диссипативные процессы.

Мелкомасштабное геострофическое течение. Сперва рассмотрим турбулентные пульсации, однородные вдоль оси Oz , то есть с $k_z = 0$; эту компоненту течения следует назвать мелкомасштабным геострофическим течением. Динамика этой компоненты определяется двумерным уравнением Навье-Стокса [21]. Эти турбулентные пульсации передают свою энергию крупномасштабному когерентному течению в среднем за время $\sim 1/\nu k_f^2$, но только если трение Экмана достаточно мало, $\nu k_f^2/\alpha \sim (k_f V^G)^2 \gg 1$, см. [165]. Согласно данным работ [166; 167], эта компонента мелкомасштабного течения обычно содержит только меньшую часть кинетической энергии всех мелкомасштабных турбулентных пульсаций.

Инерционные волны. Далее рассмотрим инерционные волны, у которых $\pi/H \leq k_z \ll k_f$, где нижняя граница для k_z определяется размерами течения по вертикали. Эти моды обычно содержат большую часть энергии мелкомасштабных турбулентных пульсаций и именно они предполагаются ответственными за поддержание крупномасштабного течения. Групповая скорость таких волн направлена почти вдоль вертикальной оси и равна $2\Omega_0/k_f$. Эта скорость имеет малую проекцию на горизонтальную плоскость, равную $2\Omega_0 k_z \mathbf{k}_\perp / k^3$. Динамика этих турбулентных пульсаций определяется отношением между частотой инерционных волн $\omega_{\mathbf{k}} \sim 2\Omega_0 k_z / k_f$ и силой сдвигового течения Σ .

Если $\omega_k \gg \Sigma$ (то есть $k_z \gg k_f \text{Ro}$), то динамика инерционных волн с противоположными поляризациями расцеплена, и каждая волна передаёт свою энергию когерентному течению за время $\sim 1/\Sigma$ [62], см. обсуждение после формул (2.73, 2.74). Рассмотрение процесса передачи энергии для этого предела уже сделано в конце Пункта 3.4.3. Здесь следует добавить, что, поскольку проекция групповой скорости волн на горизонтальную плоскость относительно мала, смещение волнового пакета в этой плоскости за время $1/\Sigma$ мало по сравнению с размером вихря, если $k_f R \gg (k_z/k_f)/\text{Ro}$. Условие локального приближения для описания крупномасштабного течения, таким образом, становится менее сильным.

Неоднородное по вертикали квази-геострофическое течение. В противоположном пределе $\pi/H \leq k_z \lesssim k_f \text{Ro}$ динамика турбулентных пульсаций не определяется дисперсионным законом для инерционных волн, поскольку взаимодействие с когерентным геострофическим течением превышает силу Кориолиса. Нами было установлено, что передача энергии для этих мод происходит за время, оцениваемое как $t_{tr} \sim \min[k_f \text{Ro}/(k_z \Sigma), 1/(\nu k_f^2)]$, см. уравнение (2.76). Поскольку время, требуемое такому роду вихрей для достижения горизонтальных границ есть $\sim k_f H \text{Ro}/\Sigma > t_{tr}$, то трение Экмана не препятствует передаче энергии когерентному течению.

3.4.7 Выводы

Мы рассмотрели крупномасштабное течение, устанавливающееся в быстро вращающейся как целое жидкости под действием некоторой внешней силы, возбуждающей мелко-масштабное течение. Рассмотрение производилось в пределе сильной по мощности накачке и быстрого вращения, когда число Рейнольдса, характеризующее возбуждающее течение силу, велико, $\text{Re}_f = \epsilon^{1/3}/\nu k_f^{4/3}$ (2.2), а число Россби мало, $\text{Ro}_f = \epsilon^{1/3} k_f^{2/3}/2\Omega_0$ (2.19). В этом случае реализуется обратный каскад, в котором энергия передаётся более крупным масштабам. Если размер области течения L в направлении, ортогональном оси вращения, достаточно велик, то обратный каскад останавливается на масштабе $L_\alpha \sim \epsilon^{1/2} \alpha^{-3/2}$ вследствие трения Экмана. Мы проанализировали обратный предел, когда горизонтальный

размер области течения мал, $L < L_\alpha$. Тогда энергия накапливается на масштабе системы, что сопровождается формированием когерентных геострофических аксиально-симметричных вихрей [136; 177]. Мы рассмотрели один из таких вихрей, обозначив его радиус R и его азимутальную скорость V^G .

Мы проанализировали зависимость азимутальной скорости V^G от расстояния $r_\perp$ до оси вихря, предполагая ряд выполненных условий: число Россби, характеризующее крупномасштабное течение, $Ro = V^G/(2\Omega_0 R) \ll 1$ и число Экмана $Ek = \nu/(\Omega_0 H^2) \ll 1$ мала, а характерное волновое число возбуждающей течения силы, удовлетворяет условиям $k_f R_u \gg 1/Ro$ и $\nu k_f^2 \ll \Sigma \sim V^G/R$. Последнее условие означает, что турбулентные пульсации практически не теряют энергию вследствие действия вязкости, вместо чего передавая её крупномасштабному когерентному вихрю. Если высота H области течения велика, $k_f H \gg 1/Ro$, то большая часть инерционных волн, будучи возбуждёнными мелкомасштабной внешней силой, не достигают верхней и нижней границ течения и потому не испытывают трения Экмана. В противном случае, если $k_f H \lesssim 1/Ro$, должно быть наложено дополнительное условие $\alpha \ll \Sigma$ (то есть $Ek^{1/2} \ll Ro$), которое означает, что трение о границы настолько мало, что оно не влияет на передачу энергии от инерционных волн когерентному вихрю. Подчеркнём, что трение Экмана по-прежнему может играть существенную роль для крупномасштабного течения. В случае анизотропной накачки, когда характерное значение проекции волнового вектора на вертикаль на много меньше чем характерное значение его проекции на горизонтальную плоскость, $k_z \ll k_f$, требование $k_f R \gg 1/Ro$ должно быть снижено до условия $k_f R_u \gg (k_z/k_f)/Ro$.

Проведённый анализ приводит к следующим результатам. Если горизонтальный размер вихря R_u когерентного вихря меньше чем $V^G = \sqrt{\nu/\alpha}$, то трение Экмана не играет роли в динамике вихря, так что для радиального профиля скорости в вихре применимо ранее полученное в Главе 2 выражение $V^G(r_\perp) = \pm \sqrt{\epsilon/\nu} r \ln(R_u/r)$ (3.2). В противоположном случае трение Экмана играет существенную роль, так что профиль скорости даётся выражениями (3.35) и (3.36). Напомним, что в этой главе был рассмотрен только предел малого числа Россби, для которого циклоны и антициклоны имеют совпадающие профили скорости с точностью до знака.

Наша теория не позволяет определить радиус вихря R_u . Однако исследование баланса энергии приводит к следующим выводам. Если профиль скорости определяется объёмной вязкостью, то есть $R_u < R_{\nu/\alpha}$, то баланс энергии, то есть

баланс мощности, затрачиваемой силой, и мощности выделения тепла вследствие действия вязкости на когерентное вихревое течение, является локальным в пространстве. Поэтому можно ожидать, что в этом пределе вихри могут расти до размеров, пока не достигнут границ течения. Если же профиль скорости определяется трением Экмана, то есть $R_u > R_{\nu/\alpha}$, баланс энергии внутри вихря включает приходящий поток с периферии, в которой когерентное течение уже не может считаться доминирующим над турбулентными пульсациями. Таким образом, вихрь не может заполнить собой (почти) всю область течения.

3.5 Динамика малых радиальных возмущений конденсата

В этой Пункте мы рассматриваем следующую задачу. Предположим, что на фоне геострофического когерентного вихря возбуждено только геострофическое же мелкомасштабное течение, так что инерционные волны отсутствуют. Мы рассматриваем динамику слабых аксиально-симметричных возмущений конденсата, представляющих собой, таким образом, модуляцию азимутальной скорости конденсата по радиусу и времени. Поскольку возмущение конденсата предполагается малым по амплитуде, мы линеаризуем уравнение Навье-Стокса, усреднённое по времени и азимутальному углу, по его амплитуде. Далее мы устанавливаем закон дисперсии для возмущения — зависимость частоты его осцилляций во времени от пространственной структуры. Закон дисперсии оказывает линейным и зависящим от радиального положения в случае, если насыщение конденсата происходит за счёт трения о дно. Если же насыщение происходит за счёт действия объёмной вязкости, то затухание возмущений оказывается сильным, так что закон дисперсии совпадает с законом дисперсии возмущений в вязком приграничном слое.

Для сокращения объёма математических выражений, мы введём нижний индекс ‘0’ для обозначения невозмущённых параметров когерентного течения и нижний индекс ‘1’ для обозначения его возмущения. Таким образом, средняя азимутальная скорость V^G (2.3), сила локального сдвига Σ (2.6), касательное напряжение Рейнольдса τ (2.5), мощность ϵ (2.4), передаваемая внешней силой мелко-масштабному течению, равны

$$V^G = V^{(0)} + V^{(1)}, \quad \Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1, \quad \tau = \tau_0 + \tau_1, \quad \epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1. \quad (3.39)$$

Все невозмущённые величины предполагаются зависящими только от r (мощность ϵ_0 однородна в пространстве), будучи постоянными во времени. В частности, сила локального сдвига $\Sigma_0 = r_\perp \partial_{r_\perp} (V^{(0)}/r_\perp)$. Возмущения имеют зависимость как в радиальной компоненты, так и от времени.

Сделаем несколько замечаний, в том числе специфических для случая, когда турбулентность представляет собой исключительно геострофическое течение. Во-первых, вспомним, что сила (она же скорость) нелинейного взаимодействия между когерентным течением и турбулентностью определяется силой сдвига Σ_0 . Она должна быть больше скорости нелинейного взаимодействия мелко-масштабной турбулентности с самой собой $\epsilon^{1/3} k_f^{-2/3}$, $\Sigma_0 \gg \epsilon^{1/3} k_f^{-2/3}$. Если конденсат вязкий, так что $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon_0/\nu}$, см. (3.36), то это условие равносильно условию великости числа Рейнольдса, характеризующего мелко-масштабную силу (2.2), которое и так предполагается выполненным. Если конденсат насыщен трением о дно, то имеет место решение (3.35) с $\Sigma_0 = -V^{(0)}/r$, которое верно, пока расстояние до оси вихря не слишком велико, $r_\perp < R_u$. Максимально возможный радиус вихря в этом случае [21]

$$R_u \sim \alpha^{-1/2} \epsilon_0^{1/6} k_f^{-2/3}. \quad (3.40)$$

Отметим, что область течения L может быть как больше так и меньше масштаба R_u [148]. Во-вторых, как обсуждалось в Пункте 3.4.6, передача энергии когерентному течению эффективна только если трение о дно мало по сравнению со скоростью объёмной диссипации энергии турбулентности, $\alpha \ll \nu k_f^2$ [165]. Собирая вместе все условия, приходим к цепочке неравенств

$$\Sigma_0 \gg \epsilon^{1/3} k_f^{2/3} \gg \nu k_f^2 \gg \alpha, \quad (3.41)$$

которые в дальнейшем предполагаются выполненными.

Приступим к математическому описанию радиальных волн конденсата. Усредним уравнение (2.1) по углу на временах, больших по сравнению со временем $1/\Sigma_0$, но малых, по сравнению со временем передачи энергии конденсату со стороны турбулентности $1/\nu k_f^2$. Получим уравнение

$$\partial_t V^G + \alpha V^G = \left(\partial_{r_\perp} + \frac{2}{r_\perp} \right) (\nu \Sigma - \tau) + \langle f_\varphi \rangle, \quad (3.42)$$

сравни с уравнением (3.33). Мы предположили, что возбуждающая сила f может иметь ненулевое азимутальное среднее $\langle f_\varphi \rangle$. Заметим, что если когерентное течение представляет собой прямую струю, тогда координата $r_\perp$ должна пониматься

как координата поперёк струи, при этом $\Sigma_0 = \partial_{r_\perp} V^{(0)}$, то есть следует опустить член $2/r_\perp$ в (3.42), см. работы [122] и [178]. Напомним, что если конденсат находится в стационарном режиме, $\partial_t V^G = 0$, а среднее от внешней силы равно нулю, $\langle f_\varphi \rangle = 0$, тогда $V^G = V^{(0)}$, а тангенциальное напряжение Рейнольдса

$$\tau_0 = \frac{\epsilon_0}{\Sigma_0}. \quad (3.43)$$

Запишем также выражение для полной мощности, сообщаемой силой течению:

$$\langle (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \rangle = \langle (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) \rangle + \langle f_\varphi \rangle V^G = \epsilon + \langle f_\varphi \rangle V^G. \quad (3.44)$$

3.5.1 Линейный отклик конденсата на возмущения

Волны конденсата предполагаются малыми возмущениями стационарного решения $V^{(0)}(r_\perp)$. Это означает, что поправка к локальной силе сдвига мала, $\Sigma_1 \ll \Sigma_0$, где поправка есть $\Sigma_1 = r_\perp \partial_{r_\perp} (V^{(1)}/r_\perp)$. Пример распределения средней завихренности $\varpi^G = r_\perp \partial_{r_\perp} (V^G/r_\perp)$ в присутствии волны конденсата схематически изображён на Рисунке 3.9а). Вариация Σ_1 производит некоторую вариацию тангенциального напряжения Рейнольдса τ_1 в (3.42). Кроме того, мы предполагаем некоторую модуляцию мощности, передаваемой внешней силой мелко-масштабной турбулентности, задаваемой функцией $\epsilon_1(t, r_\perp)$. Такую модуляцию можно рассматривать как один из способов возбуждения волн конденсата (другим источником возбуждения является среднее от азимутальной компоненты силы $\langle f_\varphi \rangle$ в (3.42)). В общем случае линейный отклик напряжение Рейнольдса τ_1 на вариации Σ_1 и ϵ_1 может быть описан некоторым интегральными ядрами K и D ,

$$\tau_1(r_\perp) = \frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_{-\infty}^t ds K(t-s, r_\perp) \Sigma_1(s, r_\perp) + \frac{1}{\Sigma_0} \int_{-\infty}^t ds D(t-s, r_\perp) \epsilon_1(s, r_\perp), \quad (3.45)$$

локальными в пространстве, но нелокальными во времени. Локальность в пространстве (в радиальном направлении) имеет место, если масштаб возбуждения $1/k_f$ мал по сравнению с длиной волны модуляции λ , $k_f \lambda \gg 1$. Динамика волны $V^{(1)}$ может рассмотрена как медленная динамика конденсата, если частота модуляции ω мала по сравнению с силой сдвига потока, $\omega/\Sigma_0 \ll 1$. В силу линейности эти же ограничения касаются $\epsilon_1(t, r_\perp)$. Для того, чтобы найти ядра K и D в (3.45),

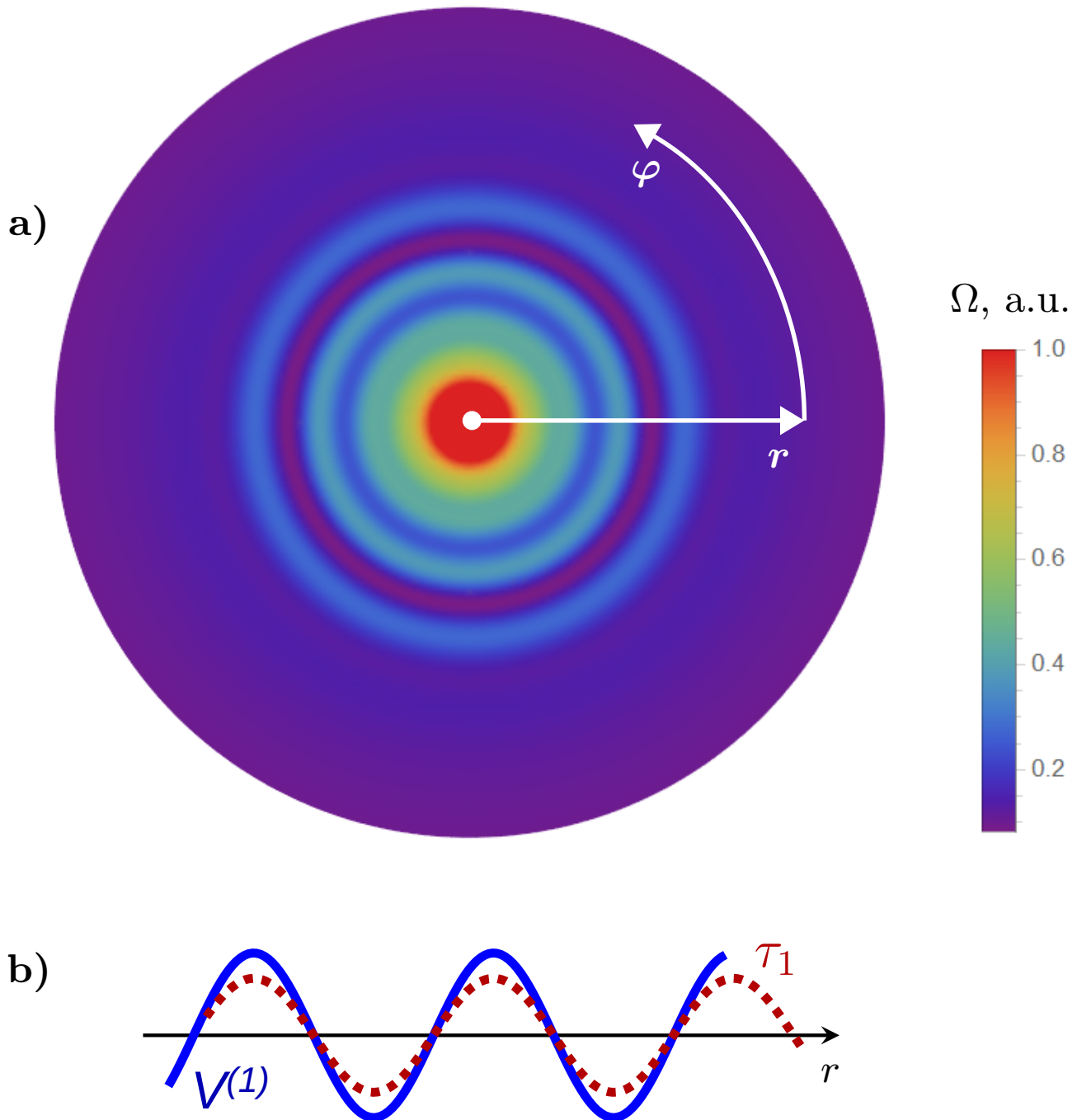


Рисунок 3.9 — а) Схематическая цветовая карта распределения завихренности в пространстве для средней завихренности $\varpi^G = r_\perp^{-1} \partial_{r_\perp} (r_\perp V_\varphi^G)$ в когерентном вихре в присутствии аксиально симметричной волны. Красная область цветовой карты соответствует превышению завихренностью максимального порога. б) Структура высоко-частотной волны конденсата, распространяющейся от оси вихря. Для того, чтобы изобразить волну, распространяющуюся к оси вихря, следует учесть, что напряжение Рейнольдса τ меняет знак при обращении направления $r_\perp$ -оси.

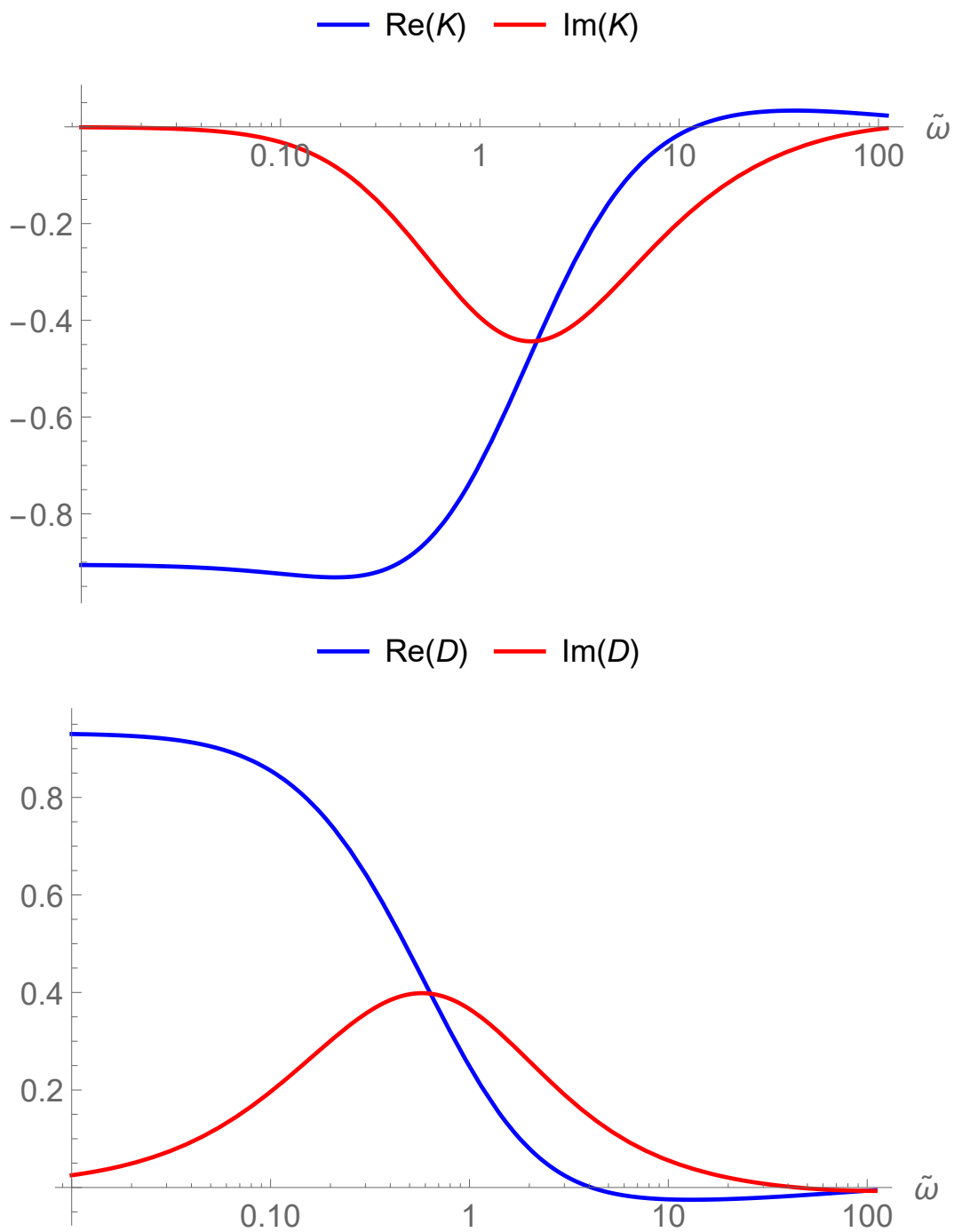


Рисунок 3.10 — Графики зависимостей K и D , см. определение (3.45), как функций безразмерной частоты $\tilde{\omega} = \omega/2\nu k_f^2$ в логарифмической шкале. Выбранные значения параметров: $\gamma = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}\nu k_f^2$.

следует расширить вычисления касательного тензора Рейнольдса, приведённые в работе [148], сохраняя первый порядок по модуляциям скорости течения $V^{(1)}$ и мощности ϵ_1 .

Путь установления динамики напряжения Рейнольдса лежит через рассмотрение динамики мелко-масштабной турбулентности на фоне медленно меняющегося во времени когерентного течения. Поскольку течение эффективно двумерное, удобно его описывать в терминах завихренности $\varpi = (\partial_{r_\perp}(r_\perp u_\varphi) - \partial_\varphi u_{r_\perp})/r_\perp$. Расстояние $r_\perp$ порядка размера вихря, а характерный масштаб мелкомасштабного течения намного меньше и равно $1/k_f$, так что $k_f r_\perp \gg 1$. Поэтому приближённо достаточно написать $\varpi = \partial_{r_\perp} u - \partial_\varphi v/r_\perp$. Внутри когерентно вихря нелинейное само-воздействие турбулентных пульсаций слабо по сравнению с воздействием когерентного течения, поэтому завихренность ϖ удовлетворяет линеаризованному уравнению

$$\partial_t \varpi + \frac{V^G}{r_\perp} \partial_\varphi \varpi + u_{r_\perp} \partial_{r_\perp} \varpi^G = \phi - \hat{\Gamma} \varpi \quad (3.46)$$

где $\varpi^G = \partial_{r_\perp}(r_\perp V^G)/r_\perp$ есть завихренность крупномасштабного течения, источник $\phi = \text{curl } \mathbf{f}$ возбуждает завихренность, и диссипативный оператор $\hat{\Gamma} = \alpha - \nu \nabla^2$ включает в себя вязкий член и трение о дно. Член $u_{r_\perp} \partial_{r_\perp} \varpi^G$ мал по сравнению с $(V^G/r_\perp) \partial_\varphi \varpi$ как $1/k_f r_\perp$, поэтому им следует пренебречь. Зафиксируем теперь некоторое $r_\perp$ и, также как это было описано в абзаце после уравнения (2.9), выберем систему отсчёта $O\xi\eta z$, которая вращается со скоростью $V(t, r_\perp)$. В этой системе отсчёта уравнение (3.46) примет вид

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} - \Sigma(t, r_\perp) \eta \frac{\partial \varpi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \hat{\Gamma} \varpi = \phi. \quad (3.47)$$

сравни с (2.21). Перепишем уравнение (3.47) в Фурье-пространстве:

$$\frac{\partial \varpi_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \Sigma k^\xi \frac{\partial \varpi_{\mathbf{k}}}{\partial k^\eta} + \frac{1}{2} \Gamma(\mathbf{k}) \varpi_{\mathbf{k}} = \phi_{\mathbf{k}}(t), \quad (3.48)$$

где $\Gamma(\mathbf{k}) = 2(\alpha + \nu \mathbf{k}^2)$. Уравнение характеристики есть

$$k'_\eta(t) = k'_\eta(s) + W(s, t) k_\xi, \quad W(s, t) = \int_s^t d\sigma \Sigma(\sigma), \quad (3.49)$$

сравни с (2.23). Решением (3.48) является

$$\varpi_{\mathbf{k}}(t) = \int_{-\infty}^t ds \phi_{\mathbf{k}'(s)} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_s^t d\sigma \Gamma(s, \sigma)\right), \quad (3.50)$$

где мы ввели как обобщение (2.68) обозначение для вязкой экспоненты

$$\Gamma(s, \sigma) = 2(\alpha + \nu \mathbf{k}^2 \tilde{\eta}(s, \sigma)), \quad \tilde{\eta}(s, t) = \sin^2 \theta + (\cos \theta - W(s, t) \sin \theta)^2, \quad (3.51)$$

и параметризацию волнового вектора через его модуль и угол, $\{k_\xi, k_\eta\} = |\mathbf{k}| \cdot \{\cos \theta, \sin \theta\}$.

Мы предполагаем, что источник ϕ обладает локально однородной статистикой в пространстве и во времени и в среднем передаёт мощность ϵ мелкомасштабным вихрям:

$$\langle \phi_{\mathbf{k}}(t) \phi_{\mathbf{k}'}(t') \rangle = 2(2\pi)^2 \epsilon(t, r_\perp) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(t - t') \mathbf{k}^2 \chi(\mathbf{k}), \quad (3.52)$$

сравни с (2.60). Как и раньше, функция $\chi(\mathbf{k})$ предполагается изотропной и убывающей на волновых числах $|\mathbf{k}| \sim k_f$. Мы проводим аналитические вычисления, предполагая произвольный вид функции $\chi(\mathbf{k})$. Однако для того, чтобы довести до числовых ответов главные результаты и построить графики наиболее интересных зависимостей, мы выбрали определённый пространственный профиль

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k_f^4} \mathbf{k}^2 e^{-\mathbf{k}^2/k_f^2} \quad (3.53)$$

сравни с (2.80).

Радиально-азимутальное напряжение Рейнольдса $\tau(t)$ в двумерном случае связано с завихренностью ϖ следующим образом:

$$\tau(t) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k'_\eta(t) k_\xi}{(\mathbf{k}'^2(t))^2} A_{\mathbf{k}}^\varpi(t), \quad \langle \varpi_{\mathbf{k}'(t)} \varpi_{\mathbf{k}_1'(t)} \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) A_{\mathbf{k}}^\varpi(t). \quad (3.54)$$

Подставим теперь в выражение (3.54) решение для завихренности (3.50) и учтём статистику возбуждающей силы (3.52):

$$\tau(t) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^t ds 2\epsilon(s) \frac{k'_\eta(t) k_\xi}{(\mathbf{k}'^2(t))^2} \exp\left(-\int_s^t d\sigma \Gamma(s, \sigma)\right), \quad (3.55)$$

Перейдём теперь, как это делалось и раньше, в интегрировании по волновому вектору к переменным $\mathbf{q} = \mathbf{k}'(s)$, так что теперь уравнение характеристики есть $q'_\eta(t) = q - W(s, t) q_\xi$. Вместо (3.55) получим

$$\tau(t) = \int_0^{+\infty} \frac{q dq}{(2\pi)^2} \chi(q) \int_{-\infty}^t ds 2\epsilon(s) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{(\cos \theta + W \sin \theta) \sin \theta}{q^4} \exp\left(-\int_s^t d\sigma \Gamma(s, \sigma)\right), \quad (3.56)$$

где теперь везде мы должны заменить $\tilde{\eta} \rightarrow \eta$, а определение η отличается от определения $\tilde{\eta}$ (3.51) заменой знака перед W . Дробь в (3.56) можно представить как полную производную по времени,

$$\tau(t) = - \int_0^\infty \frac{q dq}{2\pi} \chi(q) \int_{-\infty}^t ds \frac{\epsilon(s)}{\Sigma(t)} \int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{2\pi} \exp\left(- \int_s^t d\sigma \Gamma(s, \sigma)\right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\lambda(s, t)}. \quad (3.57)$$

Перепишем теперь это выражение в следующей форме:

$$\begin{aligned} \tau(t) = & - \int_0^\infty \frac{q dq}{2\pi} \chi(q) \int_{-\infty}^t ds \frac{\epsilon(s) e^{-2\alpha(t-s)}}{\Sigma(t)} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\exp\left(-2\nu q^2 \int_s^t d\sigma \lambda(s, \sigma)\right)}{\lambda(s, t)} \\ & - \int_0^\infty \frac{q dq}{2\pi} \chi(q) \int_{-\infty}^t ds \frac{\epsilon(s) e^{-2\alpha(t-s)}}{\Sigma(t)} 2\nu q^2 \int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{2\pi} \exp\left(-2\nu q^2 \int_s^t d\sigma \lambda(s, \sigma)\right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Первое слагаемое в этом уравнении соответствует скорости передачи (мощности) $F\epsilon$ кинетической энергии $\langle \mathbf{u}^2 \rangle$ когерентному течению, тогда как второе слагаемое есть вязкая диссипация течения в турбулентных пульсациях $\nu \langle \mathbf{k}^2 \mathbf{u}^2 \rangle$.

Чтобы получить отклик напряжение Рейнольдса согласно (3.45), мы линеаризуем выражение (3.58) отдельно по вариации мощности возбуждения $\epsilon_1 = \epsilon(t) - \epsilon_0$ и по вариации силы сдвига $\Sigma_1 = \Sigma(t) - \Sigma_0$. Первое слагаемое в (3.58) определяет основные свойства функций $D, K(\omega, \alpha)$. Интеграл по времени s в них определяется масштабами, для которых $\int_s^t ds \Sigma(s) \gg 1$. В этом случае интеграл по углу θ насыщается в узкой области вблизи $\sin \theta_0 = W(s, t)$:

$$\begin{aligned} \tau_a \approx & - \int_0^\infty \frac{q dq}{2\pi} \frac{\chi(q)}{\Sigma(t)} \int_{-\infty}^t ds \epsilon(s) e^{-2\alpha(t-s)} \\ & \frac{d}{dt} \exp\left(-2\nu q^2 \left((t-s) - 2 \frac{\int_s^t d\sigma W(s, \sigma)}{W(s, t)} + \frac{\int_s^t d\sigma (W(s, \sigma))^2}{(W(s, t))^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Во втором слагаемом в (3.58) интегрирование по θ может быть выполнено явно,

$$\begin{aligned} \tau_b(t) = & -2\nu \int_0^\infty \frac{q^3 dq}{2\pi} \frac{\chi(q)}{\Sigma(t)} \int_{-\infty}^t ds \epsilon(s) e^{-2(\alpha + \nu q^2)(t-s)} \times \\ & \times e^{-\nu q^2 \int_s^t d\sigma (W(s, \sigma))^2} I_0\left(\nu q^2 \sqrt{\left(2 \int_s^t d\sigma W(s, \sigma)\right)^2 + \left(\int_s^t d\sigma (W(s, \sigma))^2\right)^2}\right), \end{aligned} \quad (3.60)$$

где I_0 есть модифицированная функция Бесселя первого порядка. Для постоянной силы сдвига $\Sigma = \Sigma_0$ интеграл по s в выражении (3.60) определяется масштабом

$(t - s) \sim (\Sigma_0^2 \nu q^2)^{-1/3}$, на которых вязкая диссипация уже существенно влияет на флуктуации скорости [21]. Это утверждение остаётся в силе после линеаризации по ϵ_1 и Σ_1 , что приводит к тому, что вклад от интеграла (3.60) в ядра D , $K(\omega, \alpha)$ является постоянной, имеющей порядок $O(\gamma^{2/3})$.

Это приводит нас к следующим выражениям для Фурье-образов ядер D , K :

$$D(\omega + 2i\alpha, \gamma) = \int \frac{q dq}{2\pi} \chi(q) \frac{2\nu q^2/3}{2\nu q^2/3 + 2\alpha - i\omega} + C_d \gamma^{2/3} \quad (3.61)$$

$$K(\omega, \alpha, \gamma) = \int \frac{q dq}{2\pi} \chi(q) \int_0^\infty ds e^{-2\alpha s} e^{-2\nu q^2 s/3} \quad (3.62)$$

$$\left(\frac{2\nu q^2}{s^2} (i\omega - 2\alpha) \int_0^s dx x^2 e^{i\omega x} - \left(\frac{2}{3} \nu q^2 \right)^2 \int_0^s dx e^{i\omega x} \right) + C_4 \gamma^{2/3}.$$

Коэффициенты при диссипативном члене в (3.58) определяются интегралами с усреднением по статистике накачки χ :

$$C_d \gamma^{2/3} = -\frac{2^{4/3} \pi}{3^{2/3} \Gamma^2(\frac{5}{6})} \int \frac{q dq}{2\pi} \chi(q) \left(\frac{2\nu q^2}{\Sigma_0} \right)^{2/3}, \quad C_4 = -\frac{4}{3} C_d. \quad (3.63)$$

На частотах $1 \ll \tilde{\omega} \ll \gamma^{-1/2}$ функция D может быть аппроксимирована зависимостью

$$D(\omega) = \int \frac{(q^2/3k_f^2) q dq}{2\pi} \chi(q) \cdot \frac{i}{\tilde{\omega}}. \quad (3.64)$$

В итоге приходим к тому, что уравнение (3.42), линеаризованное по вариациям величин (3.39), в частотном представлении имеет вид

$$(-i\omega + \alpha) V_{1\omega} + \left(\partial_{r_\perp} + \frac{2}{r_\perp} \right) \left(\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} K - \nu \right) r_\perp \partial_{r_\perp} \frac{V_{1\omega}}{r_\perp} = - \left(\partial_{r_\perp} + \frac{2}{r_\perp} \right) \frac{\epsilon_{1\omega}(r_\perp)}{\Sigma_0} D + F, \quad (3.65)$$

где безразмерный параметр (2.69) теперь зависит от координаты, $\gamma(r_\perp) = 2\nu k_f^2 / |\Sigma_0(r_\perp)| \ll 1$.

Проведём анализ зависимости $K(\omega, \alpha, \gamma)$, которая определяет дисперсию для решений однородной версии уравнения (3.65). В пределе нулевой частоты, т.е. для стационарного случая, возможно разложить (3.43) по ϵ_1 и Σ_1 , пренебрегая малыми по безразмерным параметрам $\alpha/\nu k_f^2$ и γ поправками. В результате этого разложения, во-первых, получаем $D|_{\omega \rightarrow 0} = 1$, что соответствует тому, что постоянное напряжение Рейнольдса τ_0 определяется интегралом по времени с ядром

D после замены $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_0$. Дальнейшее обсуждение свойств ядра D дано ниже в Пункте 3.5.4. Во-вторых, в статическом пределе $K|_{\omega \rightarrow 0} = -1$, так что сила сдвига Σ_1 и производная по радиусу от напряжения Рейнольдса $\partial_{r_1} \tau_1$ антикоррелированы, что соответствует экспериментальным наблюдениям, сделанным в работе [170]. Стационарный предел применим для частот $\omega \lesssim \alpha$. При бóльших частотах $1 \ll \tilde{\omega} \ll \gamma^{-1/2}$ применимо следующее аналитическое приближение:

$$K = -\frac{C_3 i}{\tilde{\omega}} - \frac{C_1 \ln \tilde{\omega} + C_2}{\tilde{\omega}^2} + C_4 \gamma^{2/3}. \quad (3.66)$$

Зависимость от частоты (3.66) выражается через комбинацию $\tilde{\omega} = \omega/(2\nu k_f^2)$, поскольку напряжение Рейнольдса определяется временами $\sim 1/\nu k_f^2$ в интеграле по обратным временам в (3.57) в случае стационарного конденсата, смотри [21]. Это означает, что зависимость от $\tilde{\omega}, \gamma$ в (3.66) является универсальной. Численные коэффициенты оказываются равными $C_1 = 4$, $C_2 \approx -2$, $C_3 = 8/3$, $C_4 \approx 6$ для частного вида пространственного профиля корреляционной функции возбуждающей силы (3.53). Действительные и мнимые части K построены на Рисунке 3.10.

3.5.2 Корреляция между напряжением Рейнольдса и зональным течением

Рассмотрим сперва вязкий конденсат, в котором $\Sigma_0^2 = \epsilon_0/\nu$. Ядро K имеет пределы $K \rightarrow -1$ на малых частотах $\tilde{\omega} \ll 1$ и $|K| \ll 1$ на больших частотах, поэтому нелинейное взаимодействие с турбулентными пульсациями не изменяет вязкой динамики возмущений течения конденсата. Динамика возмущений конденсата соответствует нестационарным сдвиговым волнам, которые возникают, например, в нестационарных ламинарных пограничных слоях [179]. Как следует из данных численного моделирования [63], описывающиеся нашей теорией возмущения когерентного вихря не наблюдаются, а наблюдаемые крупно-масштабные возмущения имеют спиральную форму, то есть не являются однородными по азимутальному направлению и потому не описываются нашей теорией.

Теперь перейдём к рассмотрению конденсата, который насыщен за счёт трения о дно. Сначала рассмотрим низко-частотные моды $\tilde{\omega} \lesssim 1$, которые были экспериментально наблюдаемы и исследованы в работе [170]. Наши вычисления показывают, что в этой области $|K| \sim 1$, см. Рисунок 3.10. Сила сдвига $\Sigma_0^2 =$

$(3\epsilon_0/\alpha)/r_\perp^2$ в частном случае когерентного вихря [148], поэтому вязкий член в уравнении (3.65) относительно мал вне вязкой сердцевины вихря, при $r_\perp > R_\nu/\alpha$. Однородная по $V^{(1)}$ версия уравнения (3.65) принимает вид

$$(-i\omega + \alpha) V_{1\omega} + (r_\perp \partial_{r_\perp} + 3) \frac{\tau_1}{r_\perp} = 0, \quad \frac{\tau_1}{r_\perp} = \frac{\alpha K}{3} (r_\perp \partial_{r_\perp} - 1) V_{1\omega}. \quad (3.67)$$

Это уравнение однородно по $\ln r_\perp$. Оно определяет корреляцию между амплитудой скорости $V^{(1)}$ модуляции и вариацией напряжения Рейнольдса τ_1 , что может быть измерено в эксперименте [170].

Теперь рассмотрим высокочастотный предел $\tilde{\omega} \gg 1$. В этом случае оказывается, что динамика модуляции конденсата является волно-подобной с линейным законом дисперсии и относительно слабым затуханием. Для описания распространения таких волн возможно применить адиабатическое приближение, поскольку длина волны мала по сравнению с характерным масштабом когерентного течения. На основании этого пренебрежём пространственной зависимостью невозмущённой силы сдвига Σ_0 , как и любыми $1/r_\perp$ -поправками к дифференцированию по $\partial_{r_\perp}$ в (3.65). Пространственная зависимость волны определяется комплексным волновым числом

$$\beta = \frac{|\Sigma_0|}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{i(K - \nu \Sigma_0^2/\epsilon_0)}}, \quad (3.68)$$

которое может быть разложено на мнимую и действительную части, $\beta = k + i\kappa$. Длина волны, упоминавшаяся выше, равна $\lambda = 2\pi/k$, а длина распространения есть $1/\kappa$. Ниже мы показываем, смотри уравнения (3.65, 3.68), что вязкий член является пренебрежимо малым. Тогда, поскольку $-\text{Im } K \gg -\text{Re } K$ при $\tilde{\omega} \gg 1$, комплексное волновое число (3.68) является почти действительным с относительно малой мнимой частью. Заметим, что ядро K в (3.45) во временном представлении оказывается зависящим от времени, $K(t, r_\perp) = -2C_3\nu k_f^2$. Уравнение (3.65) теперь есть

$$\partial_t V^{(1)} + \partial_{r_\perp} \tau_1 = 0, \quad \tau_1(t, r_\perp) = -\frac{2C_3\epsilon_0\nu k_f^2}{\Sigma_0^2} \int^t dt' \partial_{r_\perp} V^{(1)}(t', r_\perp). \quad (3.69)$$

Если перейти к новой переменной $S_1 = \int^t dt' V^{(1)}(t')$, то уравнение (3.69) принимает вид волнового уравнения $\partial_t^2 S_1 - v_g^2 \partial_{r_\perp^2} S_1 = 0$. Фазовая скорость волн $v_g = \sqrt{2C_3\epsilon_0\nu k_f^2/\Sigma_0^2}$. Закон дисперсии линеен, поэтому групповая скорость совпадает с фазовой. Заметим, что скорость зависит от радиальной позиции r через $\Sigma_0(r_\perp)$.

Если бы волна была возмущением термодинамически равновесного состояния, то её динамика должна была бы задействовать два резервуара энергии, поскольку такая волна может быть представлена как осциллятор. Это не так в случае с волнами конденсата, поскольку когерентный вихрь не является термодинамическим равновесием. Можно сказать, что кинетическая энергия волны конденсата запасена в $V^{(1)}$. Однако аналог возвращающей силы $-\partial_{r_\perp} \tau_1$ in (3.69) не связан с каким-либо резервуаром потенциальной энергии. Здесь возвращающая сила определяется динамикой мелкомасштабной турбулентности под влиянием слабо нестационарного крупномасштабного сдвигового течения, причём сама турбулентность непрерывно возбуждается внешним источником. Пространственное распределение поля скорости и напряжения Рейнольдса в монохроматической волне схематически изображено на Рисунке 3.9b). Рассмотрим теперь отдельно когерентный вихрь. В вихре сила сдвига $\Sigma_0^2 = (3\epsilon_0/\alpha)/r_\perp^2$, смотри (3.35). В результате закон дисперсии

$$k = \omega/v_g, \quad v_g = \sqrt{\frac{2C_3}{3}\alpha\nu k_f^2} r_\perp. \quad (3.70)$$

Определим диапазон частот и пространственную область в когерентном вихре, где существуют волны конденсата на высоких частотах. Неравенство $\lambda k_f \gg 1$, обеспечивающее применимость локального в пространстве описания динамики мелкомасштабной турбулентности в поле волны V_1 означает, что

$$\omega \ll \frac{r_\perp}{R_{\nu/\alpha}} \nu k_f^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\omega} \ll \frac{r_\perp}{R_u} \sqrt{\text{Re}_f}. \quad (3.71)$$

где априорное число Рейнольдса, напомним, определено в (2.2). Из уравнения (3.71) следует, что вязкий член в (3.65) действительно относительно мал, и потому им можно пренебречь. Неравенства $\tilde{\omega} \gg 1$ и (3.71) означают, что существует логарифмически широкий диапазон частот $1 \ll \tilde{\omega} \ll (r_\perp/R_u)\sqrt{\text{Re}_f}$, в котором волны конденсата имеют относительно малую скорость затухания, если волновой пакет находится вне вязкой сердцевинки, $r_\perp \gg R_{\nu/\alpha}$. Поскольку $\gamma(r_\perp) = 2\text{Re}^{-1}(r_\perp/R_u)$, то неравенство $\tilde{\omega} \ll \gamma^{-1/2}$ является менее строгим, чем неравенство (3.71), и поэтому в диапазоне (3.71) хорошо работает аналитическое приближение (3.66). Заметим, что адиабатическое приближение для описания распространения волны верно пока $kr_\perp \gg 1$, то есть оно оказывается выполненным вследствие $\omega \gg \alpha$.

Область на $r_\perp$ - ω плоскости, которая соответствует волнам с низким затуханием закрашена светло-синим и розовым на Рисунке 3.11. Эта область определяется условиями $\omega \gg \nu k_f^2$ и (3.71). Волна, распространяясь в сторону периферии

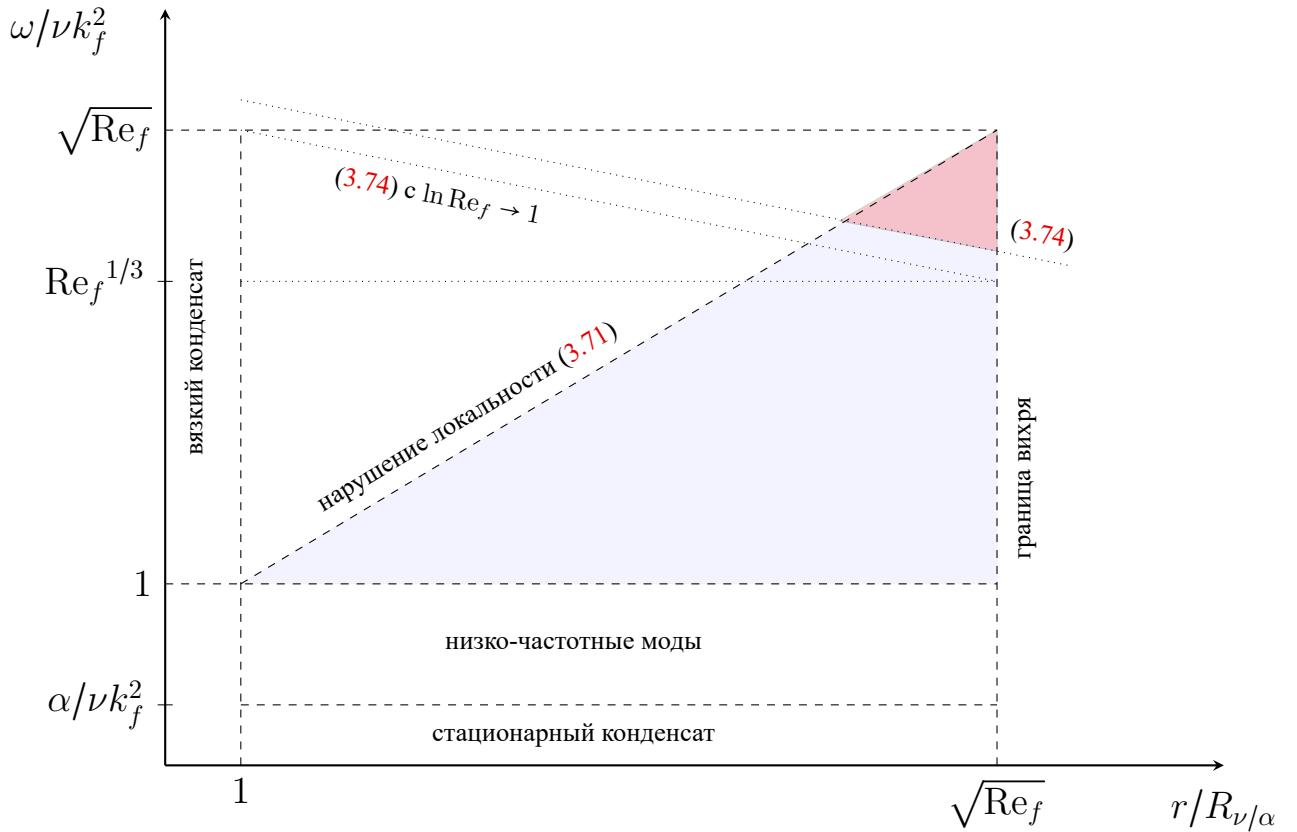


Рисунок 3.11 — Положение в зависимости от расстояния до оси вихря частотных диапазонов, в которых существуют низко-частотных моды и моды со слабым затуханием. Плоскость r - ω построена в логарифмической шкале. Максимально возможный радиус вихря $R_u = \sqrt{\text{Re}_f} R_{\nu/\alpha}$. Было выбрано значение числа Рейнольдса $\text{Re}_f = 10^4$ для оценки (3.74).

вихря или его центра сохраняет свою частоту и медленно меняет волновое число, таким образом смещаясь горизонтально вправо или влево по плоскости Рисунка 3.11.

3.5.3 Динамика амплитуды волны

Мнимая часть κ комплексного волнового числа β определяет динамику амплитуды волны. В закрашенных на Рисунке 3.11 областях κ всегда относительно мала, $\kappa \ll k$. Если принять частоту волны чисто действительной, то коэффициент затухания κ описывает ослабление волны в пространстве по мере её распространения. Если, наоборот, принять волновой вектор чисто действительным, тогда частота волны получит мнимую поправку $i\omega'' = -i\nu_g\kappa$, которая описывает затуха-

ние волны во времени. Ниже мы покажем, что κ отрицательна для розовой области на Рисунке 3.11, что соответствует неустойчивой волне, амплитуда которой возрастает по мере её распространения.

Сперва рассмотрим светло-синюю область на Рисунке 3.11, в которой второй член в (3.66) производит главный вклад в κ . Длина распространения

$$1/\kappa = \sqrt{\frac{2C_3^3\alpha}{3C_1^2\nu k_f^2} \frac{r_\perp}{\ln \tilde{\omega}}}, \quad (3.72)$$

оказывается малой по сравнению с расстоянием до оси вихря, $\kappa r_\perp \gg 1$. Поэтому не возникает необходимости учитывать поправки к адиабатическому приближению в этой области.

Теперь произведём более аккуратный анализ уравнения (3.68) для того, чтобы установить область где волны являются неустойчивыми. Последний член в (3.66) является всегда положительным и становится главным в комбинации $\text{Re}(K - \nu \Sigma_0^2/\epsilon_0)$, когда

$$\gamma^{2/3} > \frac{C_1 \ln \tilde{\omega} + C_2}{C_4 \tilde{\omega}^2} + \frac{\nu \Sigma_0^2}{C_4 \epsilon_0}. \quad (3.73)$$

Второе слагаемое в правой части (3.73) всегда меньше чем первое, если удовлетворено условие (3.71). Первое слагаемое в правой части (3.73) удовлетворяет неравенству (3.73), если частота достаточно велика,

$$\omega \gtrsim \sqrt{\text{Re}_f \cdot \ln \text{Re}_f} (R_{\nu/\alpha}/r_\perp)^{1/3} \nu k_f^2, \quad (3.74)$$

и мы приняли здесь, что $\ln \text{Re}_f \gg 1$. Область, соответствующая неустойчивым волнам, закрашена розовым на Рисунке 3.11, она определяется неравенствами (3.71, 3.74). В этой области

$$\kappa \sim -\gamma^{2/3} \tilde{\omega} k, \quad (3.75)$$

то есть по-прежнему $|\kappa r_\perp| \gg 1$.

Неустойчивость волн сокращает максимально возможный радиус когерентного вихря, делая его меньше R_u . Действительно, мелко-масштабные турбулентные пульсации возбуждают неустойчивые волны малой амплитуды V_{10} с частотой ω на расстояниях $r_\perp \sim \tilde{\omega} R_{\nu/\alpha}$, смотри уравнение (3.71). После того, как волна пройдёт некоторое расстояние $\Delta r_\perp$ в направлении от центра, градиент скорости в волне станет сравнимым с постоянной частью градиента скорости в когерентном течении, $\Sigma_0 \sim k V_{10} \exp(|\kappa| \Delta r_\perp)$. Отсюда можно получить критерий на максимальный

радиус вихря R_u^* , вне которого турбулентные пульсации превышают вредное течение. Предполагая $\ln(\Sigma_0/kV_{10})$ не очень большим числом, масштаб R_u^* может быть оценён как положение левой вершины розового треугольника на Рисунке 3.11,

$$R_u^* = \text{Re}_f^{-1/8} (\ln \text{Re}_f)^{3/8} R_u. \quad (3.76)$$

Предполагается, что $R_u^* < R_u$, в противном случае (при недостаточно большом числе Рейнольдса $\ln \text{Re}_f \lesssim 10$) розовой области на Рисунке 3.11 не существует. Вблизи $r_\perp = R_u^*$ следует ожидать волн конденсата большой амплитуды.

Отметим, что наше рассмотрение аксиально-симметричных возбуждений конденсата не может быть прямолинейно обобщено на случай аксиально несимметричных возбуждений. Действительно, предположим, что возмущение характеризуется некоторым аксиальным числом m . Если попытаться применить развитый нами подход, то следует потребовать, чтобы по крайней мере время, требуемое для того, чтобы сместить следующий узел волны (находящийся на расстоянии λ) на $2\pi r_\perp/m$ сдвиговым течением амплитуды Σ_0 должно быть больше чем время $2\pi/\omega$, требуемое волне для того, чтобы пройти расстояние λ . Это требование предполагает, что $m < \sqrt{\nu k_f^2 / \alpha \tilde{\omega}^2} / \text{Re}_f$, что может быть выполнено для ненулевого m только если конденсат является вязким.

В работе [159] сообщается о наблюдении возбуждённых не-аксиально симметричных мод на фоне когерентного вихревого течения. Хотя моды не являются однородными вдоль линий тока невозмущённого когерентного течения, среднее течение не изменяет парную корреляционную функцию этих мод в силу их специальной пространственной структуры. Динамика корреляционной функции определяется диссипационными процессами, и потому является медленной, то есть эти моды могут трактоваться как медленные возмущения конденсата. Однако, в отличие от рассмотренных нами возмущений конденсата, динамика мод не связана с напряжением Рейнольдса. Мы полагаем, что это есть следствие того, что моды являются угловыми гармониками с $m \neq 0$, в результате чего соответствующая вариация напряжения Рейнольдса усредняется в нуль посредством переноса дифференциальным вращением в вихре.

3.5.4 Возбуждение волн конденсата

Волны в конденсате непрерывно возбуждаются турбулентными пульсациями, что было измерено в экспериментальной работе [170] и может быть наблюдеено в численном моделировании, см. например [25; 26]. Одним из возможных способов намеренно возбудить волны в конденсате является приложение направленной по азимуту и аксиально-симметричной силы F , которая модулирована в радиальном направлении и осциллирует во времени, см.(3.65). Такой вариант может быть относительно легко реализован в численном эксперименте. Однако, это оказывается достаточно трудно сделать в натурном эксперименте.

Другим способом возбуждения волн конденсата является модуляция во времени вредней мощности силы, возбуждающей мелкомасштабные турбулентные пульсации. Этот вариант может быть реализован, например, в экспериментах где возбуждающей силой является сила Лоренца [23; 24; 119] или результатом нелинейного взаимодействия поверхностных волн [89]. Эффективность такого способа возбуждения определяется функцией D в (3.65). Её действительная и мнимая части построены на Рисунке 3.10. Вне низко-частотной области, то есть на частотах $\tilde{\omega} \gg 1$, функция $D(\omega)$ пропорциональна $1/\tilde{\omega}$, смотри (3.64). Поэтому ядро $D(t)$ в (3.45) не зависит от времени. Асимптотика (3.64) даёт

$$D(\omega) = \frac{2i}{3\tilde{\omega}} \quad (3.77)$$

для модельной накачки (3.53). Таким образом, эффективность возбуждения спадает с возрастанием частоты. Чтобы оценить эту эффективность, сперва перепишем волновое уравнение (3.65) в упрощённой форме:

$$(\omega^2 + v_g^2 \partial_r^2 + 2iv_g \kappa \omega) V_{1\omega} = \frac{i\omega D(\omega)}{V_{(0)}} (r \partial_r + 3) \epsilon_{1\omega}. \quad (3.78)$$

Наиболее простым вариантом модуляции мощности накачки ϵ во времени является сохранение её однородности в пространстве. Этот метод, однако, является неэффективным, поскольку таким образом возбуждается только однородный в пространстве отклик $V_{1\omega}(r_\perp) \approx 3iD\epsilon_{1\omega}/V_0\omega$, амплитуда которого подавлена множителем $1/\omega$. Наиболее эффективно возбуждение оказывается, если его модуляцию локализовать в кольце вблизи некоторого $r_\perp = r_{\perp 0}$ на масштабе $|\Delta r_\perp| \ll 1/k$, где $\Delta r_\perp = r_\perp - r_{\perp 0}$, так что можно приближённо написать $\epsilon_{1\omega}(r_\perp) = E_1 \delta(\Delta r_\perp)$. Тогда

следует ожидать волны, бегущие от источника

$$V_{1\omega} \approx \text{sign}(\Delta r_{\perp}) \frac{iD k r_{\perp 0} E_1}{2V^{(0)} v_g} e^{ik|\Delta r_{\perp}| - \kappa|\Delta r_{\perp}|}. \quad (3.79)$$

3.5.5 Выводы

Мы изучили динамику слабых возмущений когерентного течения, однородных вдоль его линий тока. Предположение о пассивности турбулентных пульсаций позволило линеаризовать уравнение, описывающее их динамику. Это в свою очередь позволило описать динамику возмущений конденсата в линейном режиме на фоне стационарного крупномасштабного течения. Для аксиально-симметричных когерентных вихрей возмущения распространяются вдоль радиальной координаты. В эксперименте и численном счёте эти возмущения могут быть отделены от других турбулентных пульсаций усреднением по углу.

Если трение о дно несущественно, то есть если имеет место быть вязкий конденсат, наши исследования показывают, что нелинейное взаимодействие возмущения конденсата и мелкомасштабных турбулентных пульсаций не существенно с точки зрения динамики возмущений во всём диапазоне частот. Иными словами, вариация напряжения Рейнольдса, вызванная возмущением конденсата, пренебрежимо мала по сравнению с вязким затуханием. Поэтому динамика определяется вязкостью, что делает динамику возмущений подобной сдвиговым волнам в вязком пограничном слое.

Если же конденсат достигает своего стационарного значения за счёт трения о дно, то существует широкий диапазон частот, в котором существуют волны конденсата. Это возбуждения существуют везде в вихре вне вязкого масштаба $R_{\nu/\alpha}$, так что на расстоянии $r_{\perp}$ от оси вихря разрешённый диапазон частот находится между νk_f^2 и $\nu k_f^2 r_{\perp}/R_{\nu/\alpha}$. Закон дисперсии является линейным, $v_g \sim \sqrt{\alpha \nu} k_f r_{\perp}$, смотри выражением (3.70). Эти волны распространяются недалеко в сравнении с расстоянием до оси вихря, длина их распространения $\Delta r_{\perp}$ достаточно мала, $\Delta r_{\perp}/r_{\perp} \sim 1/(k_f R_{\nu/\alpha} \ln(\omega/\nu k_f^2))$. Наши аналитические результаты находятся в качественном согласии с результатами натурного эксперимента [170], в котором измерялись одноточечные корреляции между медленными осцилляциями напряжения Рейнольдса и азимутальной скорости.

В реальных экспериментах волны непрерывно возбуждаются благодаря флуктуациям в возбуждающей течение силы. С другой стороны, волны могут быть намеренно возбуждены путём введения слабой модуляции по времени и/или в пространстве мощности этой силы. Для высокочастотной части волн можно сказать, что возбуждение будет эффективным только если достигнута соответствующая модуляция в пространстве. Например, если возбуждение сконцентрировано в кольце толщиной v_g/ω . Это условие приводит к необходимости проведения специальных технических приготовлений, если стоит цель экспериментального наблюдения волн в этом диапазоне.

Интересно заметить, что наша теории линейного отклика предсказывает, что в области $R_u^* < r_\perp < R_u$, где R_u^* и R_u задаются равенствами (3.76) и (3.40), волны с высокими частотами оказываются неустойчивыми, то есть их амплитуда увеличивается по мере распространения. Таким образом, в этой области расстояний до оси следует ожидать на столько больших флуктуаций, что они разрушают оновое когерентное течение. Следовательно, R_u^* должно быть интерпретировано как верхняя граница для характерного размера вихря R_u , если он меньше чем размер системы L .

3.6 Заключение

Связь между напряжением Рейнольдса и силой сдвига замыкает уравнение на радиальный профиль средней азимутальной скорости в когерентном вихре. Это уравнение возможно решить аналитически в случае, когда число Россби мало, а влияние границ течения, ортогональных оси вращения, несущественно; практически речь может идти о численном счёте с периодическими граничными условиями. В результате нашего исследования, приведённого в Пункте 3.2, мы получили линейно-логарифмическая зависимость (3.2), при этом различие между циклонами и антициклонами отсутствует. Эта зависимость не является специфической для трёх-мерного течения. Если двумерный вихрь-конденсат насыщен за счёт действия объёмной вязкости, то его профиль описывается этой же зависимостью (3.2), смотри численную работу [63].

Если абсолютное значение числа Россби приближается снизу к единице, циклоны и антициклоны начинают отличаться друг от друга, о чём говорят как

о асимметрии между циклонами и антициклонами. Наше исследование, проведённое в Пункте 3.3, показало, что при прочих равных параметрах в циклоне максимум абсолютного значения средней скорости смещён ближе к оси по сравнению с антициклоном. Локальная скорость вращения жидкости в циклоне возрастает при приближении к его оси, тогда как в антициклоне она падает. Иными словами, абсолютное значение числа Россби при приближении к оси падает в циклоне и увеличивается в антициклоне. Поскольку для устойчивости вихревого течения требуется, чтобы абсолютное значение числа Россби не превышало определённый порог, то указанная особенность антициклонов приводит к ограничению их максимально возможного размера.

В Пункте 3.4 мы рассмотрели результат влияния горизонтальных границ течения (границ, ортогональных оси вращения жидкости). Известно, что при малых числах Россби это влияние приводит к появлению эффективного трения о дно для геострофического течения, характеризующегося коэффициентом линейного затухания $\alpha = 2\sqrt{\nu\Omega_0}/H$, где H – высота сосуда. В результате в уравнении на радиальный профиль скорости V^G в вихре появляется характерный масштаб $R_{\nu/\alpha} = \sqrt{\nu/\alpha}$. Ниже этого масштаба реализуется линейно-логарифмический профиль, описанный нами выше, а выше этого масштаба — плоский профиль $V^G(r_\perp) = \sqrt{3\epsilon/\alpha}$, который был ранее получен для чисто двумерного течения в работах [21; 26]. В Пункте 3.4.5 мы провели сравнение с экспериментальными данными, приведёнными в нашей работе [64]. Хотя конкретная экспериментальная ситуация отличается от идеальной постановки задачи, рассмотренной нами, обнаружен режим геострофической турбулентности, в котором присутствуют долгоживущие вихри, имеющие почти плоский участок в радиальном профиле $V^G(r_\perp)$. Кроме того, в Пункте 3.4.6 мы установили, что границы не влияют на степень передачи энергии от мелко-масштабных турбулентных пульсаций когерентному течению, только если мелкомасштабные пульсации сами не являются геострофическим течением.

В Пункте 3.5 мы рассмотрели ситуацию, когда, наоборот, поддержание геострофического крупномасштабного вихревого течения осуществляется преимущественно за счёт поглощения мелко-масштабного геострофического течения, а присутствие инерционных волн можно считать несущественным. Мы показали, что в вихре, радиус которого R_u превышает масштаб $R_{\nu/\alpha}$, могут распространяться аксиально-симметричные возмущения среднего течения (эти возмущения имеют медленную динамику по сравнению с динамикой мелко-масштабной тур-

булентности). Закон дисперсии этих возмущений является линейным, их скорость $v_g \sim r_\perp \sqrt{\alpha \nu k_f^2}$, а длина пробега велика по сравнению с длиной волны. Если же размер вихря мал в смысле $R_u < R_{\nu/\alpha}$, то волны становятся не распространяющимися: их длина пробега оказывается меньше их длины волны.

Глава 4. Перемешивание пассивного скаляра на малых масштабах

4.1 Введение

Одним из важных явлений в гидродинамике является перемешивание скалярного поля, под которым может пониматься, например, температура или концентрация примеси. Перемешивание — это процесс, который переводит неоднородное распределение скаляра в пространстве в однородное благодаря совместному действию переноса скаляра потоком жидкости и молекулярной диффузии. Течение жидкости, будучи неоднородным в пространстве, совершает деформацию скалярного поля. В результате области, в которых значение скалярного поля почти однородно, — будем называть их кляксами (blobs), — становятся вытянутыми в пространстве. Один из размеров такой кляксы увеличивается со временем, тогда как другой уменьшается. Сам по себе адвективный перенос скаляра не приводит к его гомогенизации в пространстве. Указанное сужение клякс, однако, приводит к возрастанию характерных значений градиента скалярного поля. Большие градиенты значительно ускоряют процесс диффузии, который выравнивает амплитуду скаляра в направлении поперёк вытянутых клякс. Тем самым процесс перемешивания завершается значительно быстрее, чем если бы гомогенизация скаляра происходила только за счёт действия диффузии в покоящейся жидкости. Если можно пренебречь обратной реакцией скаляра на жидкость, то его называют пассивным, а если скаляр ещё является и оптически активной примесью, то процесс перемешивания является одним из способов визуализации течения жидкости [180].

Процесс растяжения клякс потоком оказывается намного более эффективным, если поток имеет хаотическую составляющую [44]. Особенно это ускорение велико, если диффузия скаляра относительно слаба, так что характерный поперечный размер вытянутых клякс оказывается значительно меньше масштаба R , ниже которого поле скорости потока может быть хорошо приближено линейным пространственным профилем. Причина такой особенной эффективности хаотического потока с точки зрения процесса перемешивания состоит в том, что в нём расстояние между двумя близкими лагранжевыми траекториями в среднем растёт по экспоненциальному во времени закону, пока это расстояние остаётся мень-

ше R . По такому закону растёт и бóльший размер кляксы. Поскольку же объём кляксы, покуда диффузия незначительна, сохраняется в несжимаемом течении, то меньший размер кляксы экспоненциально быстро уменьшается со временем. Важной характеристикой скорости растяжения потоком является экспонента Ляпунова λ , определяемая как средняя скорость роста логарифма расстояния между лагранжевыми траекториями.

Здесь мы рассматриваем перемешивание пассивного скалярного поля ϑ в потоке, характеризующимся гладким хаотическим полем скорости. Предполагается, что характерный масштаб пространственного распределения скаляра намного меньше, чем пространственный масштаб поля скорости R . Такой предел реализуется в статистически изотропном турбулентном потоке, в котором масштаб R есть колмогоровский масштаб r_η , если число Шмидта велико, $Sc = \nu/\kappa \gg 1$, где ν — кинематическая вязкость жидкости, а κ — коэффициент диффузии скаляра. Диффузионный масштаб (его также называют масштабом Бэтчелора) r_κ , при достижении которого меньшим размером кляксы начинает действовать диффузия, оценивается как $r_\kappa \sim \sqrt{\kappa/\lambda}$, так что отношение масштабов действительно мало, $r_\kappa/r_\eta \sim 1/\sqrt{Sc} \ll 1$. В свете изучаемых в данной диссертации когерентных течений изотропное турбулентное течение можно ожидать в периферийных по отношению к когерентным вихрям областях. Другой возможностью реализации предела $r_\kappa \ll R$ является подавленность мелкомасштабных флуктуаций на фоне сильного среднего течения. Простейшими такими течениями являются осесимметричные вихри и течение вдоль стенки. В обоих случаях градиент скорости остаётся неизменным вдоль лагранжевой траектории, сформированной средним течением, и соответствует сдвиговому течению. Примерами осесимметричных вихрей являются рассматриваемые нами крупномасштабные когерентные вихри в двумерном турбулентном потоке [21; 23; 26; 148] и в турбулентном потоке вращающейся жидкости [64]. Перемешивание кляксы, размер которой мал по сравнению с расстоянием R до оси вихря, может быть рассмотрено как перемешивание в сдвиговом течении, создаваемым когерентным потоком, и имеющем силу Σ (2.6). Течение полимерного раствора в микроканале в режиме эластической турбулентности [70; 71; 181; 182] является примером течения вблизи стенки. Во всех этих течениях спектр кинетической энергии течения достаточно крутой [25; 64; 71; 182], так что действительно можно считать, что флуктуации на фоне среднего течения являются крупномасштабными и гладкими. Подавление мелко-масштабных турбулентных пульсаций означает, что эффективное число

Шмидта Sc возрастает по сравнению с его номинальным значением ν/κ . Действительно, в оценках масштаб Колмогорова r_η должен быть заменён на масштаб крупно-масштабного течения R , так что эффективное число Шмидта становится равным $Sc \sim R^2/r_\kappa^2 \gg \nu/\kappa$ [183]. Такое же приближение применимо и при рассмотрении перемешивания ньютоновской жидкостью в ламинарных вихрях [184; 185], в которых источником флуктуаций поля скорости является неидеальность граничных условий, включая отклонения поверхностной силы, приводящей жидкость в движение, от заданного распределения в пространстве.

Нами рассматривается перемешивание как в потоке с нулевым средним и изотропными статистическими свойствами, так и в потоке с сильной постоянной сдвиговой компонентой. Подчеркнём, что течения, в которых вдоль многих лагранжевых траекторий реализовалось бы среднее течение, отличное от сдвигового, является скорее искусственным построением, так что случай среднего сдвигового течения является достойным для отдельного исследования с точки зрения физических приложений. Математический анализ удобно интерпретировать как рассмотрение эволюции ансамбля ограниченных в пространстве флуктуаций пассивного скаляра, которые мы будем также называть кляксами. Характерный размер клякс принимается малым по сравнению с масштабом R , на котором перестаёт работать линейная в пространстве интерполяция поля скорости. Отметим, что математический аппарат, использующийся нами здесь для решения задачи о перемешивании скалярного поля, может быть использован и при решении задачи о кинематической стадии магнитного динамо на мелких масштабах [46; 47; 186]. Поскольку теория магнитного динамо имеет дело с векторным полем, исследование статистических свойств скалярного поля часто является более простой задачей, дающей тем не менее важное понимание общих закономерностей переноса полей любого ранга.

Работы автора, опубликованные в журналах ВАК, на основании которых написана эта Глава 4, в порядке их хронологического следования: [67], [69], [68].

Распадная задача и задача с непрерывной накачкой

При исследовании перемешивания пассивного скаляра возможны две различные постановки задачи: перемешивание (распад) некоторого исходного

распределения скаляра в пространстве или постоянное возбуждение внешним источником всё новых флуктуаций скаляра. В распадной задаче изучается эволюция статистических свойств скаляра со временем. Начальное распределение предполагается случайным в пространстве, что может быть экспериментально реализовано через действие локализованного в пространстве источника в каналах [187], микроканалах [70] и мыльных пленках [188; 189]. Статистически однородное во времени возбуждение флуктуаций скаляра приводит систему в статистически стационарный режим. В пределе большого числа Шмидта формируется турбулентный спектр Бэтчелора в интервале масштабов от диффузионного до колмогоровского R [190—192]. Этот спектр соответствует каскаду к меньшим масштабам среднеквадратичного отклонения пассивного скаляра, см. численные эксперименты [183; 193]. Для изотропной турбулентности моменты распределения скаляра были изучены аналитически в [42; 43] для распадной задачи и в [194] для задачи с непрерывной накачкой. Это рассмотрение было расширено на парную корреляционную функцию в негладком случайном поле скорости [195] в рамках модели Крайчнана [196]. Рассмотрение корреляционных функций второго и четвёртого порядков в гладком поле скорости было произведено в наших работах [67; 68]. Случай перемешивания в постоянном сдвиговом потоке, где перенос потоком становится детерминированным, рассмотрен в [197]. Перемешивание в потоке со случайной компонентой, наложенной на постоянное сдвиговое течение, изучалось в численном эксперименте [56] в рамках модели Крайчнана. В нашей работе [69] мы аналитически рассмотрели перемешивание в сильном сдвиговом потоке с наложенными относительно слабыми гладкими флуктуациями скорости.

До нашего исследования бóльшее внимание было уделено изучению корреляционных функций в задаче с непрерывной накачкой. Мы главное внимание уделяем распадной задаче, поскольку, как это будет показано ниже, корреляционные функции пассивного скаляра в распадной задаче позволяют извлечь больше информации о статистических свойствах градиента скорости, чем те же самые функции в задаче с непрерывной накачкой.

Статистика лагранжевых траекторий

На масштабах больше диффузионного можно пренебречь ролью диффузии в эволюции пассивного скаляра, тем самым сведя эволюцию к переносу течением. Результат такого переноса в гладком поле скорости за промежуток времени t описывается аффинным преобразованием, задающимся некоторой матрицей $\hat{W}(t)$. Эта матрица определяет деформацию малого элемента жидкости. Поскольку поток несжимаем, детерминант этой матрицы равен единице, $\det \hat{W} = 1$. В случае статистически изотропного случайного потока статистика матрицы $\hat{W}$ также изотропна. Интерес представляет статистика собственных значений $\exp(2\varrho_i)$ ($i = 1, \dots, d$, где d — размерность пространства) симметричной матрицы $\hat{W}\hat{W}^T$. Клякса, исходно имевшая шарообразную (в двумерном течении — круглую) форму, к моменту времени t является эллипсоидом с осями, пропорциональными $\exp(\varrho_i)$. Статистика роста бóльшей оси совпадает со статистикой удаления двух лагранжевых траекторий в потоке, и потому, в частности, характеризуется (главной) ляпуновской экспонентой λ , $\langle \varrho_1 \rangle_\sigma = \lambda t$. Меньшее собственное значение, соответственно, уменьшается, так что объём кляксы остаётся неизменным во времени.

Великость числа Шмидта, а за ним и числа Пекле Pe , определяемого как квадрат отношения начального размера кляксы l к диффузионному масштабу, $Pe = l^2/r_\kappa^2 \gg 1$, позволяет говорить, что перемешивание происходит на временах t , больших по сравнению с обратной ляпуновской экспонентой, $\lambda t \gg 1$. В этом пределе характерные значения степеней растяжения велики, так что становятся незначительными детали начального пространственного распределения скаляра. Поэтому, в частности, начальное распределение скаляра мы предполагаем изотропным.

Поскольку, в силу предполагаемой однородности статистики поля скорости в пространстве и времени, мы полагаем статистику случайного $\hat{\sigma}(t)$ однородной по времени на фиксированной лагранжевой траектории и не зависящей от выбора этой траектории, то существует функция распределения экспонент растяжения $P(t, \{\varrho_i\})$. Время корреляции поля скорости в лагранжевых координатах может достигать не только обратной амплитуды градиента скорости, но и быть гораздо больше. Например, в трёх-мерном турбулентном потоке длинные корреляции по времени вызваны когерентными структурами, продолжительность жизни ко-

торых в несколько раз превышает время оборота самых крупных вихрей в течении [198]. Если время перемешивания всё же больше, чем время авто-корреляции градиента скорости в лагранжевых координатах, то на столь больших временах вид плотности распределения $P(t, \{\varrho_i\})$ определяется обобщением центральной предельной теоремы и имеет авто-модельный вид. Тело функции совместного распределения собственных значений $\mathcal{P}(t, \{\varrho_i\})$ является лог-нормальным. Более сильные и редкие отклонения описываются Функцией Крамера (или энтропийную функцию, Cramér function) S [42]. Аналитически эту функцию оказывается возможным найти только для модельного случая коротко-коррелированного во времени поля скорости [199]. В реальных турбулентных потоках её измерение представляет интерес, поскольку она является характеристикой статистики поля на малых масштабах.

Если в течении присутствует сильная средняя сдвиговая компонента, то процесс перемешивания является более сложным вследствие наложенной анизотропии, хотя по-прежнему действие переноса в пренебрежении диффузией есть аффинное преобразование $\hat{W}$. В случае постоянного сдвига без флуктуаций вектор между двумя близкими лагранжевыми частицами ориентируется по направлению потока [197], а его длина растет линейно со временем. Иными словами, в постоянном сдвиговом течении экспонента Ляпунова равна нулю. Однако направление вдоль течения оказывается неустойчивым стационарным состояние вектора. Прохождение через него осуществляется за счёт действия случайной компоненты течения, поворачивающей вектор, переводя его направление в область неустойчивости [200]. После прохождения точки равновесия вектор под действием сдвигового течения разворачивается на угол π и вновь выравнивается параллельно потоку. Такой процесс, называемый проворотом (tumbling), происходит с некоторой средней частотой. Визуализировать провороты в эксперименте можно через наблюдение за длинными полимерными молекулами, см. [201; 202]. Отметим, что прохождение неустойчивой точки соответствует задаче о диффузии в кубическом потенциале вблизи его положения равновесия. Эта модель носит универсальный характер, описывая ряд нестационарных физических явлений [203]. Далее, процесс проворота приводит к установлению среднего ненулевого значения угла между вектором и линиями тока сдвигового течения, то есть сопровождается экспоненциальным ростом расстояния между лагранжевыми траекториями. В итоге гладкие флуктуации, даже будучи относительно слабыми на фоне сдвигового течения, приводят к ненулевому значению ляпуновской экспо-

ненты. Поэтому их учёт является принципиально важным с точки зрения теории перемешивания, приводя к его значительному ускорению. Если силу флуктуаций оценить как $D \ll \Sigma$, то оценкой для экспоненты Ляпунова является $\lambda \sim (D\Sigma^2)^{1/3}$ [204].

Общие закономерности статистических свойств аффинной деформации $\hat{W}$ приведены в Пункте 4.2.1, где определена функция Крамера S и её основные свойства. В Пункте Б.1 Приложения Б приведён вывод уравнения Ланжевена для логарифмических степеней деформации ϱ_i в модели коротко-коррелированного во времени поля скорости с изотропной статистикой. В Пункте 4.5.1 рассмотрена статистика лагранжевых траекторий в течении с сильной сдвиговой компонентой, а модель коротко-коррелированной во времени флуктуирующей части скорости рассмотрена в Приложении Б.3. В частности, мы показываем, что при правильной перемасштабировке пространственных координат статистика направления главного растяжения становится почти изотропной, хотя явления переворотов, разумеется, не исчезает. Изотропизация даёт возможность применять в качестве оценок результаты, полученные для статистически изотропной модели.

Поиск главных значений матрицы $\hat{W}\hat{W}^T$ предполагает, что мы производим сингулярное разложение матрицы $\hat{W} = \hat{N}\hat{D}\hat{O}$ (singular value decomposition, SVD) на произведение ортогональной $\hat{N}$, диагональной $\hat{D}$ и снова ортогональной $\hat{O}$ матриц. Однако выясняется, что четырёх-точечная корреляционная функция скаляра в думерном течении зависит в том числе и от матрицы поворота $\hat{O}$, определяющейся динамикой поля скорости на начальных временах $\lambda t \lesssim 1$. Для того, чтобы учесть совместную динамику поворота $\hat{O}$ и растяжения $\hat{D}$, математически более удобным оказывается разложение Ивасава [205] (Iwasawa decomposition) матрицы $\hat{W} = \hat{Q}\hat{D}\hat{T}$ на поворот $\hat{Q}$, диагональную матрицу $\hat{D}$ и верхне-треугольную матрицу $\hat{T}$ с единичной диагональю. В [206] и Приложении Б.2 описано, как в рамках этого разложения записывается действие для коротко-коррелированной во времени модели поля скорости.

Корреляционные функции скаляра

Общие закономерности перемешивания скаляра в гладком поле скорости приведены в Пункте 4.2. В Пункте 4.2.2 мы определяем свойства корреляцион-

ных функций скаляра. В частности, мы вводим частично усреднённую парную корреляционную функцию $\mathcal{F}$, в которой произведено усреднение только по начальному распределению скаляра или по статистике источника, возбуждающего флуктуации скаляра. Мы предполагаем, что эта статистика является гауссовой, так что объект $\mathcal{F}$ полностью определяет все статистические свойства скаляра при фиксированной реализации поля скорости. Качественно это можно понимать так, что распределение скаляра в пространстве является результатом перекрытия в одной точке многих клякс скаляра с одинаковым пространственным профилем, но случайным положением в пространстве. Функция $\mathcal{F}$, таким образом, зависит от конкретной реализации градиента скорости как случайного процесса. Кроме того, без потери физической общности рассмотрения задачи мы полагаем, что пространственный профиль распределения скаляра в кляксах также имеет гауссов профиль; такое распределение мы называем одномасштабным. Это оказывается технически удобным, поскольку гауссовость профиля сохраняется во времени, так что частично усреднённая корреляционная функция $\mathcal{F}$ определяется всего несколькими параметрами. В Пункте 4.2.3 мы связываем динамику параметров, определяющих $\mathcal{F}$, с динамикой степеней растяжения элемента жидкости ϱ_i .

Парная корреляционная функция $F(t, \mathbf{r})$ есть результат усреднения частично усреднённой функции $\mathcal{F}(t, \mathbf{r})$ по статистике градиента скорости, $F(t, \mathbf{r}) = \langle \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) \rangle_\sigma$. Мы демонстрируем в Пункте 4.3, что динамическое уравнение на $\mathcal{F}(t, \mathbf{r})$ для распадной задачи выше диффузионного масштаба после несложного преобразования совпадает с динамическим уравнением на в том же смысле недоусреднённую плотность $\mathcal{P}(t, \varrho)$ совместного распределения главной степени растяжения $\varrho \equiv \varrho_1$ и направления этого растяжения $\mathbf{n}$, $\varrho = \varrho \mathbf{n}$. Отличие между $\mathcal{F}(t, \mathbf{r})$ и $\mathcal{P}(t, \varrho)$ возникает только вследствие начальных условий. Однако оно становится несущественным на больших временах $\lambda t \gg 1$. На таких временах, если статистика градиента скорости изотропна, то изотропно и распределение направления $\mathbf{n}$. В таком случае установленная связь переходит в связь между парной корреляционной функцией $F(t, r)$, зависящей теперь только от абсолютного значения r радиус-вектора $\mathbf{r}$, и плотностью распределения $\mathcal{P}(t, \varrho)$ главной степени растяжения с $\exp(\varrho) = r/l$, $F(t, r) \propto \exp(-d\varrho)\mathcal{P}(t, \varrho)$. На сколько нам известно, этот универсальный результат получен нами впервые.

Парная корреляционная функция $F(t, \mathbf{r})$ не содержит в себе информации о полосчатой структуре распределения скаляра в пространстве, то есть о том, что перекрывающиеся между собой кляксы являются сильно вытянутыми, см.

Рисунок 4.1. Эта информация содержится в четырёх-точечной корреляционной функции F_4 . В силу линейности профиля скорости в пространстве, эта функция является суммой трёх вкладов [207]. Каждый вклад соответствует одному из трёх вариантов разделения четырёх точек F_4 на две пары, при этом он зависит только от двух векторов $r_{21,43}$, соединяющих точки в каждой паре. Когда вектора становятся почти коллинеарными, то есть угол между ними стремится к нулю, корреляционная функция F_4 испытывает особенность, так что её значение при параллельной геометрии значительно превышает значение при угле порядка единицы. Подобно тому, как это было сделано для парной корреляционной функции, мы показываем, что в трёх-мерном течении вклад $F_4(t, r_{21}, r_{43})$ в исходную F_4 пропорционален $\exp(-4\rho - 2\rho_2) \mathcal{P}(t, \rho, \rho_2)$, где $\exp(2\rho)$ и $\exp(2\rho_2)$ суть собственные значения матрицы $\hat{R} = (r_{21}r_{21}^T + r_{43}r_{43}^T)/l^2$. Стремление геометрии к коллинеарной соответствует пределу $l \exp(\rho_2) \sim r_\kappa$ при фиксированном значении главной степени растяжения ρ .

Вычисление корреляционных функций путём определения оптимальной флуктуации

Двумерное несжимаемое течение оставляет независимым только одно направление деформации элементарного объёма жидкости, поскольку условие несжимаемости течения накладывает связь $\rho + \rho_2 = 0$. Двумерное течение, таким образом, слишком низкоразмерно для корреляционной функции F_4 в том смысле, что описанная выше связь с функцией распределения $P(t, \rho)$ не имеет места. Установить аналогичную связь общего вида для произвольной статистики градиента скорости оказывается затруднительным, если вообще возможным, поскольку в ответ должен входить коэффициент молекулярной диффузии. Мы поэтому сделаем упрощающее предположение, что время наблюдения велико, так что $P(t, \rho)$ имеет автомодельный вид, выражаясь через функцию Крамера S . Определённым основанием для этого является почти полное отсутствие эффекта перемежаемости в двумерном турбулентном потоке [18], а перемежаемость есть маркер наличия когерентных структур в трёх-мерном турбулентном течении [198]. Если $P(t, \rho)$ имеет автомодельный вид, то любую корреляционную функцию скаляра возможно вычислять путём определения оптимальной флукту-

ации, формирующей её при данных значениях её параметров, выразив её через функцию Крамера S . Под оптимальной флуктуацией [42] мы понимаем реализацию процесса $\hat{\sigma}$, которая с учётом вероятности её реализации обеспечивает наибольший вклад в корреляционную функцию. Этот метод применим, когда реализации, существенно отличающиеся от оптимальной, вносят значительно меньший вклад в среднее. Окончательные выражения для F_4 мы вычисляем с функцией Крамера S , полученной для коротко-коррелированной во времени модели поля скорости. Эти выражения совпадают с результатом прямого решения уравнения Фоккера-Планка на F_4 , см. Пункт 4.4.2.

Для того, чтобы связать какую-либо корреляционную функцию скаляра с функцией Крамера, мы проводим вычисления по следующей схеме. Сначала мы решаем уравнение на парную частично усреднённую корреляционную функцию $\mathcal{F}(t, r)$ для произвольной реализации случайного процесса $\hat{\sigma}(t)$. Удобной интерпретацией вычислений оказывается представление скалярного поля как суперпозиции клякс, форма которых описывается $\mathcal{F}(t, r)$. До достижения диффузионного масштаба r_κ форма кляксы описывается матрицей $\hat{W}\hat{W}^T$. С ростом времени t диффузия становится существенной по крайней мере для меньшего размера кляксы, препятствуя его сокращению ниже диффузионного масштаба r_κ . После начала действия диффузии клякса начинает увеличиваться в объёме экспоненциально со временем. А поскольку полное количество скаляра не изменяется, интенсивность скаляра в кляксе уменьшается экспоненциально со временем. Это и есть процесс турбулентного перемешивания, когда совместное действие переноса неоднородным в пространстве полем скорости и диффузии значительно ускоряет перемешивание по сравнению со случаем покоя жидкости. Мы строим частично усреднённый аналог искомой корреляционной функции из $\mathcal{F}$ и проводим усреднение по статистике градиента скорости через поиск оптимальной флуктуации.

Для верификации и демонстрации изложенного метода, мы сначала вычисляем парную корреляционную функцию F в Пункте 4.3 в трёх и двух измерениях, $d = 2, 3$ для статистически изотропного поля скорости. Мы удостоверяемся, что ответ, полученный путём поиска оптимальной флуктуации, для модели коротко-коррелированного во времени поля скорости совпадает с общим выражением для F . Кроме того, в Приложении В мы устанавливаем уравнение Фоккера-Планка на F .

В хаотическом течении со сдвиговой компонентой мы исследуем статистику одно-точечных моментов скаляра $\langle |\vartheta(t)|^\alpha \rangle$ в распадной задаче, см. Пункт 4.5.3. После этого рассматриваем задачу о непрерывного возбуждения флуктуаций скаляра в Пункте 4.5.4. Наш анализ [69] аналогичен представленному в работе, посвящённой статистически изотропному течению [194], с необходимыми расширениями на анизотропию.

4.2 Общие соотношения

Уравнением, описывающим динамику пассивного скаляра ϑ , переносимого случайным потоком $\mathbf{v}$, подверженного диффузии с коэффициентом κ , и возбуждаемого внешним источником (накачкой) f , является

$$\partial_t \vartheta + (\mathbf{v} \nabla) \vartheta = \kappa \Delta \vartheta + f. \quad (4.1)$$

Это уравнение является скалярной версией уравнения (2.20) на амплитуду инерционной волны в крупномасштабном поле скорости. В уравнении (4.1) величины $\vartheta, f, \mathbf{v}$ являются функциями времени t и координаты $\mathbf{r}$. Мы предполагаем, что как в скорости течения $\mathbf{v}$, так и в накачке f имеются случайные составляющие, приводящие к сложному поведению статистики ϑ . Коэффициент диффузии κ предполагается относительно малым, критерий нами формулируется ниже.

Мы рассматриваем предел, в котором поле скорости $\mathbf{v}$ достаточно считать гладким, так что оно может быть разложено в ряд Тейлора с радиусом сходимости, превышающим все масштабы задачи, характеризующие распределение пассивного скаляра. Чтобы проследить за процессом перемешивания, перейдем в систему отсчёта, движущуюся вместе с некоторой лагранжевой частицей. В ней скорость может быть приближена линейной зависимостью

$$v_i = (\Sigma_{ik} + \sigma_{ik}) r_k, \quad (4.2)$$

где Σ_{ik} и $\sigma_{ik}(t)$ — постоянная и флуктуирующая во времени части градиента скорости, так что среднее по времени $\langle \sigma_{ik} \rangle_\sigma = 0$ (нижний индекс ‘ σ ’ у угловых скобок означает усреднение по статистике флуктуаций градиента поля скорости). Условие несжимаемости приводит к $\text{tr } \hat{\Sigma} = \text{tr } \hat{\sigma} = 0$. Уравнение (4.1) принимает вид

$$\partial_t \vartheta + (\Sigma_{ik} + \sigma_{ik}) r_k \partial_i \vartheta = \kappa \Delta \vartheta + f. \quad (4.3)$$

В отличие от уравнения (2.21) на поле волны, распространяющейся в постоянном сдвиговом течении, в уравнении (4.3) у градиента поля скорости есть, помимо постоянной, ещё и переменная во времени часть. В случае крупномасштабного вихря переменная часть градиента вызвана крупномасштабными флуктуациями течения, которые появляются, в частности, вследствие того, что центр вихря перемещается относительно границ течения. В этой Главе мы показываем, что наличие переменной составляющей $\sigma_{ik}(t)$ градиента скорости значительно обогащает модель, качественно изменяя процесс перемешивания.

4.2.1 Статистика лагранжевых траекторий

В этого места до конца Пункта 4.2 для краткости изложения мы будем предполагать, что матрица σ_{il} в (4.2) включает в себя как переменную, так и постоянную части градиента скорости.

В Фурье-пространстве уравнение (4.3) переписывается в виде

$$\partial_t \vartheta_{\mathbf{k}} - \sigma_{il} k_i \partial_{k_l} \vartheta_{\mathbf{k}} = -\kappa \mathbf{k}^2 \vartheta_{\mathbf{k}} + f_{\mathbf{k}}. \quad (4.4)$$

Также, как это было в случае с инерционными волнами, смотри (2.23), эволюция согласно (4.4) происходит вдоль характеристики

$$\begin{aligned} \frac{dk'_i}{dt} &= -\sigma_{ki} k'_k, \quad k'_i(t) = W_{li}(t', t) k_l(t'), \\ \partial_t W_{li}(t, t') &= \sigma_{lm}(t) W_{mi}(t, t'), \quad W_{li}(t, t) = \delta_{li}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отметим, что, согласно определению, перестановка начального и конечного времён у матрицы $\hat{W}$ приводит к её обращению, $W_{li}(t', t) = (\hat{W}^{-1}(t, t'))_{li}$. Уравнение (4.4), переписанное вдоль характеристики (4.5), приобретает вид

$$\frac{d\vartheta_{\mathbf{k}'(t)}(t)}{dt} = -\kappa \mathbf{k}'^2 \vartheta_{\mathbf{k}'(t)}(t) + f_{\mathbf{k}'(t)}(t), \quad (4.6)$$

решением которого является

$$\vartheta_{\mathbf{k}}(t) = \int_{t_1}^t dt_1 f_{\hat{W}^T(t, t_1)\mathbf{k}}(t_1) \cdot \exp\left(-\kappa \int_{t_1}^t dt_2 |\hat{W}^T(t, t_2) \mathbf{k}|^2\right). \quad (4.7)$$

Если времена небольшие, так что диффузией в (4.7) можно пренебречь, т.е. экспоненту можно считать равной единице, то решение (4.7) в координатном пространстве переписывается в форме

$$\vartheta(t, \mathbf{r}) = \int^t dt_1 f(t_1, \hat{W}^{-1}(t, t_1) \mathbf{r}), \quad (4.8)$$

которая выражает перенос скаляра вдоль лагранжевых траекторий. Матрица $\hat{W}$ (4.5) описывает разбегание двух близких лагранжевых траекторий. Вектор $\mathbf{r}(t)$, разделяющий две такие траектории, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dr_i}{dt} = \sigma_{ik} r_k, \quad r_i(t) = W_{ik}(t, t') r_k(t'). \quad (4.9)$$

На больших временах абсолютное значение вектора $\mathbf{r}$ в среднем растёт по экспоненциальному закону. Величина

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{|\mathbf{r}(t)|}{|\mathbf{r}(0)|} \quad (4.10)$$

называется (главной) экспонентой Ляпунова. В дальнейшем мы часто будем использовать безразмерное время $\tau = \lambda t$.

Опишем статистические свойства матрицы $\hat{W}$. Поскольку течение бездивергентно, то детерминант аффинного преобразования равен единице, $\det \hat{W} = 1$. Представим матрицу аффинного преобразования $\hat{W}$ в виде сингулярного разложения,

$$\hat{W} = \hat{\mathcal{N}} \hat{\mathcal{D}} \hat{\mathcal{O}}, \quad (4.11)$$

где матрицы $\hat{\mathcal{N}}$ и $\hat{\mathcal{O}}$ — ортогональные, а $\hat{\mathcal{D}}$ — диагональная матрица с положительными собственными значениями и детерминантом, равным единице вследствие $\det \hat{W} = 1$,

$$\varrho_i = \ln \mathcal{D}_{ii}, \quad \varrho_1 \geq \varrho_2 \geq \dots, \quad \sum_{i=1}^d \varrho_i = 0, \quad \varrho_i(t=0) = 0. \quad (4.12)$$

Сингулярное разложение является однозначной операцией, если экспоненты ϱ_i не имеют совпадающих значений; именно такой случай нас и будет интересовать в дальнейшем. Это разложение, помимо математического удобства, имеет простую геометрическую интерпретацию: результат действия матрицы $\hat{W}$ (4.9) может быть представлен в виде последовательных ортогонального поворота матрицей $\hat{\mathcal{O}}$, растяжения вдоль координатных осей матрицей $\hat{\mathcal{D}}$, и ортогонального поворота матрицей $\hat{\mathcal{N}}$.

Подстановка разложения (4.11) в уравнение динамики матрицы $\hat{W}$ (4.5) приводит к уравнению

$$\hat{\Omega}^n \hat{\mathcal{D}} + \hat{\mathcal{D}} \hat{\Omega}^o + \partial_t \hat{\mathcal{D}} = \hat{\sigma}^n \hat{\mathcal{D}}, \quad \hat{\sigma}^n = \hat{\mathcal{N}}^T \hat{\sigma} \hat{\mathcal{N}}, \quad \hat{\Omega}^n = \hat{\mathcal{N}}^T \partial_t \hat{\mathcal{N}}, \quad \hat{\Omega}^o = \partial_t \hat{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}^T, \quad (4.13)$$

где верхний индекс ‘ T ’ у матриц означает транспонирование. Матрицы $\hat{\Omega}^n$ и $\hat{\Omega}^o$ имеют геометрический смысл угловых скоростей вращения, являясь антисимметричными. Диагональные матричные элементы уравнения (4.13) суть уравнения на экспоненты растяжения

$$\partial_t \varrho_i = \sigma_{ii}^n. \quad (4.14)$$

Для того, чтобы определить угловую динамику, возьмём следующие линейные комбинации уравнения (4.13):

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}} \hat{\Omega}^o \hat{\mathcal{D}}^{-1} - \hat{\mathcal{D}}^{-1} \hat{\Omega}^o \hat{\mathcal{D}} + 2 \hat{\mathcal{D}}^{-1} \partial_t \hat{\mathcal{D}} &= \hat{\sigma}^n + \hat{\sigma}^{nT}, \\ \hat{\mathcal{D}}^{-1} \hat{\Omega}^n \hat{\mathcal{D}} - \hat{\mathcal{D}} \hat{\Omega}^n \hat{\mathcal{D}}^{-1} + 2 \hat{\mathcal{D}}^{-1} \partial_t \hat{\mathcal{D}} &= \hat{\mathcal{D}} \hat{\sigma}^{nT} \hat{\mathcal{D}}^{-1} + \hat{\mathcal{D}}^{-1} \hat{\sigma}^n \hat{\mathcal{D}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Недиагональные матричные элементы уравнения (4.15) суть уравнения на матричные элементы угловых скоростей вращения:

$$\Omega_{ij}^n = \frac{\sigma_{ij}^n \exp(\varrho_j - \varrho_i) + \sigma_{ji}^n \exp(\varrho_i - \varrho_j)}{2 \operatorname{sh}(\varrho_j - \varrho_i)}, \quad \Omega_{ij}^o = \frac{\sigma_{ij}^n + \sigma_{ji}^n}{2 \operatorname{sh}(\varrho_i - \varrho_j)}. \quad (4.16)$$

На больших временах $\tau \gg 1$ степень растяжения становится сильной,

$$e^{\varrho_1} \gg e^{\varrho_2} \gg e^{\varrho_3}. \quad (4.17)$$

В этом пределе динамика матрицы $\hat{\mathcal{O}}$ согласно (4.16) останавливается, а скорость вращения уже растянутой кляксы имеет матричные элементы $\Omega_{ij}^n = \sigma_{ij}^n$ при $j > i$, не зависящие от логарифмических степеней растяжения ϱ_i . Таким образом, динамика матрицы поворота $\hat{\mathcal{N}}$, а вместе с тем и случайного процесса $\hat{\sigma}^n$ (4.13) перестаёт зависеть от значений экспонент ϱ_i . Время корреляции случайного процесса $\hat{\sigma}^n(t)$ имеет тот же порядок, что и время корреляции процесса $\hat{\sigma}(t)$, которое может быть оценено как $1/\lambda$. На больших временах правая часть динамического уравнения (4.14) на ϱ_i не зависит от их значения. Поэтому можно выделить среднее значение λ_i скорости роста экспоненты Ляпунова $\aleph_i$ в правой части (4.14),

$$\partial_t \varrho_i = \lambda_i + (\sigma_{ii}^n - \lambda_i), \quad \lambda_i = \langle \sigma_{ii}^n \rangle_\sigma, \quad \sum_i \lambda_i = 0. \quad (4.18)$$

Старшая ляпуновская экспонента есть уже определённая в (4.10), $\lambda_1 \equiv \lambda$. На временах, больших по сравнению со временем корреляции правой части в (4.18), величины ϱ_i являются суммой многих одинаково распределённых независимых случайных величин. Поэтому плотность вероятности $\mathcal{P}$, описывающая отклонения экспонент ϱ_i от их среднего значения, задаётся энтропийной функцией S , которую также называют функцией Крамера (Cramér) [42; 208]:

$$\mathcal{P}(\varrho_1, \varrho_2) = \frac{\sqrt{|\partial_{\alpha\beta} S|} \theta(\varrho_1 - \varrho_2) \theta(\varrho_2 - \varrho_3)}{2\pi\tau} \exp(-\tau S(\xi_1, \xi_2)), \quad \xi_i = \frac{\varrho_i}{\tau} \quad (4.19)$$

для трёх-мерного случая. Безразмерная функция $S(\xi_1, \xi_2)$ имеет минимум при $\xi_i = \lambda_i/\lambda$, всюду вогнута, а $|\partial_{\alpha\beta} S|$ в (4.19) — детерминант матрицы Гессе для функции S в её минимуме. Сама матрица Гессе $||\partial_{\alpha\beta} S||$ описывает типичные флуктуации, являясь обратной матрице ковариации $t\langle \xi_\alpha \xi_\beta \rangle_\sigma$. Напомним, что в силу несжимаемости течения логарифм сжатия по третьему направлению ϱ_3 выражается через растяжения в первых двух направлениях согласно (4.12). Если течение двумерно, то статистика растяжения описывается функцией распределения

$$\mathcal{P}(t, \varrho) = \frac{\sqrt{S''}}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp(-\tau S(\xi)), \quad \xi = \varrho/\tau. \quad (4.20)$$

где $\varrho \equiv \varrho_1$, а вторая производная берётся в минимуме, $S'' = \partial_\xi^2 S(\xi)|_{\xi=1}$.

Введём здесь понятие оптимальной флуктуации. Пусть в k моменту $\tau^{(f)}$ значение удлинения по главной оси равно $\varrho^{(f)}$ и рассмотрим для минимизации объёма рассуждений двумерный случай. Возьмём некоторое промежуточное время $\tau^{(i)} \sim t$, $0 < \tau^{(i)} < \tau^{(f)}$. Процесс $\varrho(t)$ можно разбить на два соответствующих этапа, так что функция распределения по $\varrho^{(f)}$ (4.20) есть результат свёртки двух аналогичных функций распределения:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{S''}}{\sqrt{2\pi\tau^{(f)}}} \exp\left(-\tau^{(f)} S\left(\frac{\varrho^{(f)}}{\tau^{(f)}}\right)\right) = \\ & = \int \frac{S'' d\varrho^{(i)}}{2\pi\sqrt{\tau^{(i)}(\tau^{(f)} - \tau^{(i)})}} \exp\left(-\tau^{(i)} S\left(\frac{\varrho^{(i)}}{\tau^{(i)}}\right) - (\tau^{(f)} - \tau^{(i)}) S\left(\frac{\varrho^{(f)} - \varrho^{(i)}}{\tau^{(f)} - \tau^{(i)}}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Перевальное значение при интегрировании по $\varrho^{(i)}$ есть $\varrho^{(i)} = (\tau^{(i)}/\tau^{(f)})\varrho^{(f)}$, а величина флуктуаций (характерных отклонений от перевального значения) равна $\delta\varrho^{(i)} \sim \sqrt{\tau^{(f)}}$. Отсюда видно, что наиболее вероятной траекторией при фиксированном $\varrho(\tau^{(f)}) = \varrho^{(f)}$ является линейный по времени рост $\varrho(\tau) = (\tau/\tau^{(f)})\varrho^{(f)}$. Эту

траекторию мы назовём оптимальной флуктуацией предполагая, что все остальные траектории, имеющие сравнимую вероятность, не сильно от неё отличаются. Условие не сильного отличия должно формулироваться отдельно при расчёте той или иной корреляционной функции исходя из характерного значения флуктуаций $\delta \varrho(\tau)$. Отметим также, что при исследовании корреляционной функции скаляра 4-го порядка окажется, что оптимальным флуктуациям соответствует немонотонная во времени динамика $\varrho(\tau)$. В этом случае оказывается, однако, что траектория может быть разбита на участки с монотонной динамикой, так что свойство (4.21) по-прежнему оказывается актуальным.

4.2.2 Корреляционные функции

Рассматривая распадную задачу, мы полагаем, что некоторый источник обеспечил начальное распределение ϑ_0 в момент времени $t = 0$, являющееся совокупностью N центрально-симметричных клякс определённого пространственного профиля,

$$\vartheta_0 = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \vartheta_{b0}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|), \quad (4.22)$$

распределённых случайным образом в пространстве объёмом $\mathcal{V}$ (в двумерном случае — площадью), где индекс α нумерует кляксу. Пространственное распределение $\vartheta_{b0}(r)$ достигает значения $\vartheta_{b0}(r = 0) = 1$ в центре кляксы и убывает до нуля на масштабах $r \gtrsim l$, где l — характерный размер кляксы. Распределение $\vartheta_{b0}(r)$, будучи взято в качестве начального распределения при фиксированной реализации случайной компоненты течения, даёт решение $\vartheta_b(t, \mathbf{r})$ уравнения (4.1) с нулевым источником $f = 0$. Мы предполагаем, что распределение скаляра в кляксе достаточно локализовано, так что полное его количество в кляксе конечно, то есть интеграл

$$\int d^d r \vartheta_b(t) = C, \quad (4.23)$$

сходится, где $d = 2, 3$ — размерность пространства. Согласно основному уравнению динамики скаляра (4.1), полное количество скаляра C остаётся постоянным (предполагаем для определённости $C \geq 0$). Далее, интеграл

$$\int d^d r \vartheta_{b0}^2(r) = A_0, \quad A_0 \sim l^d \quad (4.24)$$

также предполагается сходящимся. Величину A_0 можно назвать начальным объёмом (площадью) кляксы.

Усреднение по начальной статистике включает в себя усреднение как по координатам каждой кляксы $\mathbf{r}_\alpha$, так и по их интенсивности a_α . Средняя интенсивность кляксы равна нулю. Средняя концентрация клякс в пространстве $n = N/\mathcal{V}$. Мы будем рассматривать предел $nA_0 \gg 1$, в котором в одной точке перекрываются много клякс. В этом пределе одноточечная статистика скаляра является гауссовой с нулевым средним. Его дисперсию мы полагаем равной $\langle \vartheta_0^2 \rangle_f = 1$ в выбранных условных единицах (нижний индекс ‘ f ’ означает усреднение по начальной статистике), для этого средний квадрат интенсивности кляксы в (4.22) должен быть равен $\langle a_\alpha^2 \rangle = 1/nA_0$. Парная корреляционная функция $\Theta(\mathbf{r}) = \langle \vartheta_0(0) \vartheta_0(\mathbf{r}) \rangle_f$ для начального условия задаётся выражением

$$\Theta(\mathbf{r}) = \langle \vartheta_0(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \vartheta_0(\mathbf{r}') \rangle_f = \frac{1}{A_0} \int d^d r' \vartheta_{b0}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}/2) \vartheta_{b0}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}/2) \quad (4.25)$$

со значением $\Theta(0) = 1$.

В случае непрерывного внесения в поток неоднородностей скаляра источником f предположение о гауссовости одноточечной статистики по-прежнему обоснованно, поскольку распределение скаляра будет результатом накопления от этого случайного источника за большое время. Тогда статистические свойства источника полностью определяются его парной корреляционной функцией, коротко коррелированной во времени:

$$\langle f(t, \mathbf{r}) f(t', \mathbf{r}') \rangle_f = \delta(t - t') \Theta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (4.26)$$

где теперь нижний индекс ‘ f ’ означает усреднение по статистике источника. Не ограничивая общности можно считать, что источник f вбрасывает в поток кляксы (4.22) в случайные моменты времени со случайным положением в пространстве $\mathbf{r}_\alpha$,

$$f = \sum_{\alpha} b_{\alpha}(t) \theta_{b0}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|). \quad (4.27)$$

Поскольку нас интересует интегральная статистика скаляра, упрощённо достаточно считать, что вброс клякс происходит мгновенно, так что корреляционная функция интенсивностей вброса клякс есть

$$\langle b_{\alpha}(t) b_{\beta}(t') \rangle = (nA_0)^{-1} \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t'), \quad (4.28)$$

а Θ связана с профилем отдельных клякс ϑ_{b0} согласно тому же (4.25).

Любая корреляционная функция скаляра является результатом усреднения как по статистике источника, так и по статистике случайного течения. Зафиксируем реализацию случайного течения. Тогда статистика пассивного скаляра остаётся гауссовой с течением времени и определяется “частично усредненной” парной корреляционной функции

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \langle \vartheta(t, 0) \vartheta(t, \mathbf{r}) \rangle_f, \quad (4.29)$$

которая является результатом усреднения только по статистике начальных условий или источника (накачки). Для распадной задачи распределение скаляра можно по-прежнему представить как суперпозицию клякс с одинаковым распределением скаляра,

$$\vartheta = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \vartheta_b(t, \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}), \quad (4.30)$$

поскольку все кляксы подвергались деформации со стороны поля скорости с одним и тем же градиентом. Корреляционная функция $\mathcal{F}$ при этом равна

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{A_0} \int d^d r' \vartheta_b(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}'/2) \vartheta_b(t, \mathbf{r} - \mathbf{r}'/2), \quad (4.31)$$

сравни с (4.25). В случае непрерывной накачки, как следует из (4.3), частично усреднённая $\mathcal{F}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \mathcal{F} + \sigma_{ik} r_k \partial_i \mathcal{F} = 2\kappa \Delta \mathcal{F} + \Theta(r). \quad (4.32)$$

Это уравнение совпадает с уравнением на пассивный скаляр (4.3), но имеет удвоенный коэффициент диффузии. Источник $\Theta(r)$ в правой части уравнения (4.32) происходит из парной корреляционной функции накачки (4.25). Для распадной задачи накачка отсутствует, а Θ (4.25) является начальным условием для $\mathcal{F}$.

Все корреляционные функции скаляра являются результатом усреднения соответствующих комбинаций из $\mathcal{F}$, усреднённых по статистике градиента скорости. В частности, полностью усреднённая парная корреляционная функция

$$F(t, \mathbf{r}) = \langle \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) \rangle_{\sigma}. \quad (4.33)$$

Поскольку до усреднения по статистике течения ϑ имеет нормальное распределение, то одноточечное среднее $\langle |\vartheta|^{\alpha} \rangle$ есть

$$\langle |\vartheta|^{\alpha} \rangle_f = C_{\alpha} \langle \vartheta^2 \rangle_f^{\alpha/2}, \quad \langle \vartheta^2 \rangle_f = \mathcal{F}|_{\mathbf{r}=0}, \quad C_{\alpha} = 2^{\alpha/2} \Gamma((\alpha + 1)/2) / \sqrt{\pi}. \quad (4.34)$$

Должно быть $\alpha > -1$, чтобы момент имел конечное значение. Полностью усреднённый одноточечный момент равен

$$\langle |\vartheta|^\alpha \rangle = C_\alpha \left\langle \langle \vartheta^2 \rangle_f^{\alpha/2} \right\rangle_\sigma. \quad (4.35)$$

4.2.3 Динамика параметров кляксы

Напомним, что уравнение на частично усреднённую парную корреляционную функцию (4.32) совпадает с уравнением на поле скаляра (4.3). Будем рассматривать сейчас распадную задачу, когда внешний источник в (4.32) отсутствует, но для частично усреднённой парной корреляционной функции имеется начальное условие (4.25),

$$\mathcal{F}(t = 0, \mathbf{r}) = \Theta(r). \quad (4.36)$$

Как и полное количество скаляра в кляксе, интеграл

$$\int d^d r \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \frac{C^2}{A_0}, \quad (4.37)$$

называемый интегралом Коррзина [209], остаётся неизменным во времени, являясь неотрицательной величиной. Его значение следует из определений для начальной парной корреляционной функции (4.25) и полного количества скаляра в отдельной кляксе (4.23). Для того, чтобы характеризовать пространственную зависимость корреляционной функции скаляра конечным числом параметров, построим матрицу моментов распределения скаляра

$$I_{il}(t) = \frac{\int \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) r_i r_l d^d r}{l^2 \int \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) d^d r}, \quad I_{il}(t = 0) = \delta_{il}. \quad (4.38)$$

(Мы предполагаем, что интеграл в числителе в (4.38) является сходящимся.) Начальное условие для матрицы $\hat{I}$ является определением для характерного размера кляксы l в начальный момент времени, который был введён нам ещё после (4.22) и в (4.24). Из (4.32) следует, что матрица моментов удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{\sigma} \hat{I} + \hat{I} \hat{\sigma}^T + \frac{2\lambda}{\text{Pe}} \hat{1}, \quad (4.39)$$

где индекс ‘ T ’ означает транспонирование матрицы, $\hat{1}$ — единичная матрица, число Пекле велико,

$$\text{Pe} = \frac{\lambda l^2}{2\kappa} = \frac{l^2}{r_\kappa^2} \gg 1, \quad r_\kappa = \sqrt{2\kappa/\lambda}, \quad (4.40)$$

а r_κ — диффузионный масштаб, на котором и ниже которого диффузия играет существенную роль. Великость числа Пекле определяет декларируемую при написании (4.1) слабость диффузии.

Можно заметить, что частный вид пространственного профиля частично усреднённой корреляционной функции — гауссов профиль

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\det \hat{I}(t)}} \exp \left(-\frac{\mathbf{r}^T \hat{I}^{-1}(t) \mathbf{r}}{2l^2} \right) \quad (4.41)$$

является решением уравнения на $\mathcal{F}$ (4.32), при этом определение (4.38) самосогласовано. Профилю (4.41) соответствует распределение скаляра в отдельной кляксе

$$\vartheta_b(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\det \hat{I}(t)}} \exp \left(-\frac{\mathbf{r}^T \hat{I}^{-1}(t) \mathbf{r}}{l^2} \right). \quad (4.42)$$

Объём (площадь) кляксы $A(t) = (\pi/2)^{d/2} l^d \sqrt{\det \hat{I}}$ согласно определению (4.24), интеграл Коррзина (4.37) равен $(\sqrt{2\pi} l)^d$. Клякса имеет эллипсоидальную форму с полуосями $l e^{\mu_i}$, $i = \overline{1, d}$, где $e^{2\mu_i}$ суть собственные значения матрицы $\hat{I}$. Мы предполагаем для определённости, что собственные значения упорядочены по убыванию, так что $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_d$. Обобщая, распределение (4.41) представляет собой пример распределения, характеризующегося одним масштабом $l e^{\mu_i}$ в каждом ортогональном направлении (направлении соответствующего собственного вектора матрицы $\hat{I}$). Такого типа распределения полностью характеризуются матрицей моментов (4.38). В начальный момент времени такое распределение будем называть “одномасштабным” с масштабом l . При анализе корреляционной функции 4-го порядка мы рассматриваем только подобные распределения, так что при проведении соответствующих аналитических вычислений мы будем использовать конкретный вид (4.41).

Решением уравнения (4.39) является

$$\hat{I}(t) = \hat{W}(t) (\hat{1} + \text{Pe}^{-1} \hat{\Lambda}) \hat{W}^T(t), \quad \hat{\Lambda} = \int_0^t 2\lambda dt' \hat{W}^{-1}(t') \hat{W}^{-1,T}(t'), \quad (4.43)$$

где $\hat{W}(t) \equiv \hat{W}(t, 0)$ есть матрица аффинного преобразования (4.9), накладываемая течением. Матрица $\text{Pe}^{-1} \hat{W} \hat{\Lambda} \hat{W}^T$ описывает влияние диффузии. В частности, та же самая матрица появляется в решении уравнения (4.4) с произвольным начальным условием $\vartheta_{0\mathbf{k}}$:

$$\vartheta_{\mathbf{k}}(t) = \vartheta_{0\mathbf{k}}(\hat{W}^T \mathbf{k}) \exp \left(-\frac{l^2}{2\text{Pe}} \mathbf{k}^T \hat{W} \hat{\Lambda} \hat{W}^T \mathbf{k} \right). \quad (4.44)$$

Свяжем свойства матрицы моментов $\hat{I}$ с разложением матрицы аффинного преобразования $\hat{W}$ (4.11). Главная наша цель — связать статистику собственных значений $e^{2\mu_i}$ матрицы $\hat{I}$ (предполагаем упорядочение $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_d$) со статистикой логарифмических степеней растяжения ϱ_i в потоке. Решение (4.43) переписывается в виде

$$I_{lm}(t) = \sum_i \left(e^{2\varrho_i} \mathcal{N}_{li} \mathcal{N}_{mi} + \sum_j e^{\varrho_i + \varrho_j} \frac{\mathcal{L}_{ij}}{\text{Pe}} \mathcal{N}_{li} \mathcal{N}_{mj} \right), \quad (4.45)$$

$$\hat{\mathcal{L}} = \int_0^t 2\lambda dt' \delta\hat{\mathcal{O}}(t, t') \hat{\mathcal{D}}^{-2}(t') \delta\hat{\mathcal{O}}^T(t, t'),$$

где ортогональная матрица $\delta\hat{\mathcal{O}}(t, t') = \hat{\mathcal{O}}(t) \hat{\mathcal{O}}^T(t')$, а ортогональные матрицы $\hat{\mathcal{N}}$ и $\hat{\mathcal{O}}$ определены в (4.11). Ниже мы предполагаем выполнение сильных неравенств (4.17), а также (почти) монотонную историю динамики экспонент ϱ_i , что соответствует наиболее вероятным реализациям случайного процесса $\hat{\sigma}$.

Для того, чтобы оценить влияние диффузии, определим матричные элементы второго слагаемого в (4.45) в базисе, задаваемом ортогональной матрицей $\hat{\mathcal{N}}$, предполагая монотонный во времени рост логарифмических степеней растяжения $\varrho_i(t)$. Сперва заметим, что матрица $\delta\hat{\mathcal{O}}(t, t')$ слабо отличается от единичной. Оценивая её недиагональные матричные элементы, положим $\varrho_i > \varrho_j$, а $k \neq i, j$, так что $\varrho_k = -\varrho_i - \varrho_j$ (если течение двумерно, то $\varrho_k = 0$). Ввиду (4.16), недиагональные матричные элементы матрицы поворота $\delta\hat{\mathcal{O}}$ оцениваются как

$$[\delta\mathcal{O}(t, t')]_{ij} \sim [\delta\mathcal{O}(t, t')]_{ji} \sim \exp \left(-\varrho_i(t') + \varrho_j(t') \right). \quad (4.46)$$

В результате диагональные и недиагональные матричные элементы в (4.45) оцениваются как

$$e^{2\varrho_i} \mathcal{L}_{ii} \sim \int_0^t \lambda dt \exp(2\varrho_i(t) - 2\varrho_i(t')), \quad (4.47)$$

$$e^{\varrho_i + \varrho_j} \mathcal{L}_{ij} \sim \int_0^t \lambda dt \exp(\varrho_k(t') - \varrho_k(t)). \quad (4.48)$$

Отсюда получаем окончательные оценки: для диагонального элемента, если $\varrho_i > 0$, то $e^{2\varrho_i} \mathcal{L}_{ii} \sim e^{2\varrho_i}$ и формируется на начальных временах $\tau' \sim 1$, в противном случае $e^{2\varrho_i} \mathcal{L}_{ii} \sim 1$ и формируется на конечных временах $\lambda(t - t') \sim 1$; для недиагонального элемента, $e^{\varrho_i + \varrho_j} \mathcal{L}_{ij} \sim 1$ и формируется на последних временах, если $\varrho_k > 0$, если же $\varrho_k < 0$, то $e^{\varrho_i + \varrho_j} \mathcal{L}_{ij} \sim e^{-\varrho_k}$ и формируется на начальных временах. Формирование на начальных временах означает, что диффузия играет относительно наибольшую роль в начале процесса перемешивания, когда все размеры кляксы одного порядка. Формирование на конечных временах означает, что диффузия для данного матричного элемента становится всё важнее с течением времени вследствие сокращения соответствующего размера кляксы.

Переведём теперь эти оценки в оценки для матричных элементов матрицы $\hat{I}$ (4.45). Пусть индекс μ принимает такие значения, что растяжение (тут вернее говорить ‘сжатие’) кляксы аффинным преобразованием $\hat{W}$ не достигло диффузионного масштаба r_d , то есть $\exp(\varrho_\mu(t)) \gg l/\sqrt{\text{Pe}}$ (таким образом, μ принимает значение 1 и, может быть, 2 и 3). Для вкладов с $i = \mu$ можно пренебречь вторым, диффузионным слагаемым в (4.45). Индексы α, β принимают остальные значения (т.е., возможно, 3 и 2). Для вкладов с $i = \alpha, j = \beta$, наоборот, доминирует диффузионное слагаемое в (4.45). Тогда, пренебрегая относительно малыми недиагональными μ - α и α - μ вкладами, получаем

$$I_{lm} = \sum_{\mu} N_{l\mu} N_{m\mu} e^{2\varrho_\mu} + \sum_{\alpha, \beta} e^{\varrho_\alpha + \varrho_\beta} \frac{\mathcal{L}_{\alpha\beta}}{\text{Pe}} N_{l\alpha} N_{m\beta}. \quad (4.49)$$

Если диффузия была несущественна на протяжении всего времени эволюции, то второе слагаемое в круглой скобке (4.45) пренебрежимо мало, так что $\hat{I} = \hat{W} \hat{W}^T$. Иными словами $\mu_i = \varrho_i$, а матрицы поворота равны, $\hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{N}}$, то есть ориентация главных осей кляксы совпадает с направлениями, задаваемыми матрицей $\hat{\mathcal{N}}$. Матрицы поворота останутся равными и если степень сжатия кляксы аффинным преобразованием уже достигло диффузионного масштаба, $e^{\varrho_3} < 1/\sqrt{\text{Pe}}$, но этот

масштаб не достигнут по второму направлению, $e^{\varrho_2} \gg 1/\sqrt{\text{Pe}}$. Однако теперь $e^{2\mu_3} \sim 1/\text{Pe}$, то есть меньший размер кляксы порядка диффузионного масштаба r_d . Наконец, у матриц поворота $\hat{\mathcal{N}}$ и $\hat{\mathcal{R}}$ совпадает только главное направление, $\mathcal{R}_{l1} = \mathcal{N}_{l1}$, если диффузионный масштаб достигнут в том числе и по второму направлению, $e^{\varrho_2} \ll 1/\sqrt{\text{Pe}}$. При этом $e^{2\mu_{2,3}} \sim 1/\text{Pe}$. Результат проведённых оценок можно кратко записать в следующем виде

$$\mu_1 = \varrho_1, \quad \mu_2 = -a_\kappa + \chi(\varrho_2 + a_\kappa), \quad \mu_3 = -a_\kappa + \chi(\varrho_3 + a_\kappa), \quad a_\kappa = \frac{1}{2} \ln \text{Pe}, \quad (4.50)$$

где функция $\chi(x) = x\theta(x)$, а функция Хевисайда $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. Выражения (4.50) позволяют связать статистику μ_i со статистикой ϱ_i .

Эти результаты можно получить и другим способом. Диагонализуем симметричную матрицу $\hat{I}$ матрицей поворота $\hat{\mathcal{R}}$,

$$\hat{I} = \hat{\mathcal{R}} \hat{\mathcal{M}} \hat{\mathcal{R}}^T, \quad \mathcal{M}_{ii} = e^{2\mu_i}, \quad (4.51)$$

где $\hat{\mathcal{M}}$ — диагональная матрица. Подстановка (4.51) в уравнение (4.39) разложения (4.51) даёт матричное уравнение

$$\partial_t \hat{\mathcal{M}} + \hat{\Omega}^r \hat{\mathcal{M}} - \hat{\mathcal{M}} \hat{\Omega}^r = \hat{\sigma}^r \hat{\mathcal{M}} + \hat{\mathcal{M}} \hat{\sigma}^{rT} + \frac{2\lambda}{\text{Pe}}, \quad \hat{\sigma}^r = \hat{\mathcal{R}}^T \hat{\sigma} \hat{\mathcal{R}}, \quad \hat{\Omega}^r = \hat{\mathcal{R}}^T \partial_t \hat{\mathcal{R}}, \quad (4.52)$$

сравни с (4.13). Отдельно диагональные и недиагональные матричные элементы уравнения (4.52) приводятся к видам

$$\partial_t \mu_i = \sigma_{ii}^r + \frac{\lambda}{\text{Pe}} e^{-2\mu_i}, \quad \Omega_{ij}^r = \frac{\sigma_{ij}^r e^{\mu_j - \mu_i} + \sigma_{ji}^r e^{\mu_i - \mu_j}}{2 \text{sh}(\mu_j - \mu_i)}. \quad (4.53)$$

Динамика экспонент μ_i (4.53) воспроизводит динамику экспонент ϱ_i (4.18), если диффузией возможно пренебречь. Точно также, при сильном разделении размеров кляксы по ортогональным направлениям, динамика матрицы поворота $\hat{\mathcal{R}}$ становится независимой от степеней растяжения μ_i , так что от них становится независимой и статистика процессов σ_{ii}^r . Эта статистика совпадает со статистикой процессов σ_{ii}^n (4.14), а потому статистика μ_i совпадает со статистикой ϱ_i (4.19). Однако на больших временах диффузией нельзя пренебречь для тех экспонент, которые уменьшаются с течением времени. Второе, диффузионное слагаемое в $\partial_t \mu_i$ обеспечивает то, что меньший размер кляксы не становится меньше диффузионного масштаба, $e^{\mu_i} \gtrsim 1/\sqrt{\text{Pe}}$.

4.3 Парная корреляционная функция

Сперва покажем, что уравнение на частично усреднённую парную корреляционную функцию $\mathcal{F}(t, \mathbf{r})$ (4.32) в бездиффузионном пределе $\kappa = 0$ и в отсутствии внешнего источника Θ эквивалентно уравнению на в том же смысле частично усреднённую функцию распределения $\wp$ главной логарифмической степени растяжения $\varrho = \varrho_1$. Уравнение на частично усреднённую функцию распределения $\wp$, содержащую главную степень растяжения, может быть получено из уравнения (4.9) на вектор $\mathbf{r}$, соединяющий две близкие лагранжевы траектории. Решение определяет решение (4.32) в пределе нулевой диффузии,

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \Theta(|\hat{W}^{-1}\mathbf{r}|). \quad (4.54)$$

Значит, $\mathcal{F}$ оказывается существенно отличным от нуля, если вектор $\mathbf{r}$ удовлетворяет уравнению (4.9) с начальным условием $|\mathbf{r}(0)| \lesssim l$, то есть $\mathbf{r}(t)$ с экспоненциальной точностью определяется главным собственным значением матрицы $\hat{W}$, так что $\mathcal{P}(t, \varrho)$ и $F(t, \mathbf{r})$ должны быть связаны между собой через соотношение $\varrho = \ln(r/l)$. Для того, чтобы показать это на языке уравнений, введём единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ и проектор на ортогональные ему направления $\delta_{ik}^\perp = \delta_{ik} - n_i n_k$. Скорости изменения степени растяжения ϱ и направления $\mathbf{n}$ согласно (4.9) равны

$$\dot{\varrho} = \sigma_{ik} n_i n_k, \quad \dot{n}_i = \delta_{il}^\perp \sigma_{lk} n_k. \quad (4.55)$$

Динамическое уравнение на совместную функцию распределения $\wp(t; \varrho, \mathbf{n})$ есть

$$\partial_t \wp = -\partial_\varrho (\dot{\varrho} \wp) - \delta_{ik}^\perp \frac{\partial}{\partial n_k} (\dot{n}_i \wp). \quad (4.56)$$

Совместная функция распределения по ϱ и $\mathbf{n}$, являющаяся результатом усреднения по статистике скорости, есть $\mathcal{P}(t; \varrho, \mathbf{n}) = \langle \wp(t; \varrho, \mathbf{n}) \rangle_\sigma$. Подставив в (4.56) выражения для $\dot{\varrho}$ и $\dot{n}_i$ из (4.55), получим

$$\partial_t (\wp e^{-d\varrho}) = -\partial_\varrho (n_k \sigma_{kl} n_l \wp e^{-d\varrho}) - n_l \sigma_{kl} \delta_{ki}^\perp \frac{\partial}{\partial n_i} (\wp e^{-d\varrho}). \quad (4.57)$$

Приняв во внимание, что $\partial_\varrho = r n_i (\partial/\partial r_i)$, $\delta_{ki}^\perp (\partial/\partial n_k) = r \delta_{ki}^\perp (\partial/\partial r_k)$ и $r n_l = r_l$, мы придём к уравнению (4.32) с $\kappa = 0$ и $\Theta = 0$, если положить

$$\wp = (r/l)^d \mathcal{F}. \quad (4.58)$$

В (4.58) множитель $r^d \propto \exp(d\rho)$ есть якобиан перехода от координат $\mathbf{r}$ к переменным $\{\rho, \mathbf{n}\}$. Сохранение интеграла (4.37) от $\mathcal{F}$ соответствует сохранению полной вероятности для плотности распределения $\wp$. Усреднение (4.58) по статистике скорости приводит к равенству

$$\mathcal{P}(t, \rho, \mathbf{n}) = (r/l)^d F(t, \mathbf{r}), \quad (4.59)$$

верному в том числе и для анизотропной статистике градиента скорости.

Ниже этом Пункте 4.3 мы предполагаем, что течение является статистически изотропным, так что $\Sigma_{ik} = 0$ в уравнении (4.3) на перенос скаляра ($\langle \sigma_{ik} \rangle_\sigma = 0$ в уравнении на парную корреляционную функцию (4.32)), а $\sigma_{ik}(t)$ имеет изотропную статистику. Тогда в процессе эволюции у угловых частей распределений $\wp$, $\mathcal{F}$ быстро (за время порядка $1/\lambda$) достигается изотропность. Произведём усреднение по статистике скорости в обеих частях (4.58). Распределение по углам на временах $\tau \gg 1$ можно считать изотропным, поэтому останется только радиальная зависимость:

$$\mathcal{P}(t, \rho) = (r/l)^d F(t, r), \quad (4.60)$$

где распределение $\mathcal{P}(t, \rho) = \langle \wp(t; \rho, \mathbf{n}) \rangle_\sigma$ по логарифмической степени растяжения ρ для двумерного потока определено в (4.20). Для трёх-мерного потока в левой части (4.60) стоит плотность функции распределения (4.19), проинтегрированная по второй степени растяжения ρ_2 :

$$\mathcal{P}(t, \rho) = \int d\rho_2 \mathcal{P}(t, \rho, \rho_2). \quad (4.61)$$

Равенство (4.60) имеет место на масштабах больше диффузионного масштаба (4.40), при $r \gg r_\kappa$. На малых масштабах $r \lesssim r_\kappa$ диффузия сглаживает поведение корреляционной функции, так что $F(t, 0) \sim F(t, r_\kappa)$.

В качестве задела для проведения аналогичных вычислений для корреляционной функции четвёртого порядка отметим, что связь (4.60) могла бы быть получена только лишь путём анализа вида уравнения (4.57) без его дальнейших преобразований. Первое слагаемое в (4.57) представляет собой полную производную по степени растяжения ρ , под знаком дифференцирования в качестве множителя перед $\wp e^{-d\rho}$ стоит $\dot{\rho}$. Второе слагаемое в (4.57) есть скорость вращения (4.55) единичного вектора $\mathbf{n}$, свёрнутая с градиентом по этому вектору. Именно такой порядок в свёртке приводит к совпадению со структурой (4.32) в том смысле, что, во-первых, дифференциальные операторы в совокупности с множителями в

(4.57) имеют 0-ю степень по абсолютному значению r вектора $\mathbf{r}$, а, во-вторых, дифференциальные операторы не действуют на эти множители. Дифференциальные операторы действуют на комбинацию $\wp e^{-d\varrho}$, а вместе с тем функции $\mathcal{F}$ и $\wp$ описывают распределение одной и той же лагранжевой траектории. Поэтому следует заключить, что дальнейшее преобразование (4.57) неизбежно приведёт к уравнению (4.32) с нулевой правой частью.

4.3.1 Определение оптимальной флуктуации градиента скорости

На этом можно было бы завершить исследование связи корреляционной функции F с функцией Крамера S (4.19, 4.20). Однако в случае с корреляционной функцией четвёртого порядка F_4 в двумерном течении, как мы увидим ниже, аналогичной связи не имеет места быть. Связь имеет другой вид, и чтобы её найти, мы используем метод поиска оптимальной флуктуации. Поэтому ниже для демонстрации метода мы подобную же процедуру проведём для парной корреляционной функции, поскольку любая из описанных процедур её нахождения оказывается проще, чем для F_4 .

Для того, чтобы приступить к усреднению в (4.33) по статистике турбулентного течения, перепишем (4.41) в виде, позволяющим явно разделить степень растяжения и поворот в пространстве:

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\det \hat{\mathcal{M}}}} \exp \left(-\frac{(\hat{\mathcal{R}}\mathbf{r})^T \hat{\mathcal{M}}^{-1}(\hat{\mathcal{R}}\mathbf{r})}{2l^2} \right). \quad (4.62)$$

Это удобно, поскольку статистика экспонент μ_i и матрицы поворота $\hat{\mathcal{R}}$ (4.51) являются независимыми, процедура усреднения (4.33) разделяется на независимые усреднения по ориентации кляксы в пространстве и по степени её деформации.

Трёх-мерный поток

Произведём первым усреднение по ориентации кляксы, то есть по направлениям вектора $\hat{\mathcal{R}}\mathbf{r}$ в (4.62) или же, что тоже самое, по матрице $\hat{\mathcal{R}}$. Поскольку

поток является статистически изотропным, то и статистика вектора $\hat{\mathcal{R}}\mathbf{r}$ является изотропной. Усреднение касается только экспоненты в (4.62), поэтому только её и будем иметь в виду. Результат усреднения экспоненты зависит от соотношения между абсолютным значением вектора r/l и числами $\exp \mu_i$ и может быть представлен как доля полного телесного угла, для которой вектор $\hat{\mathcal{R}}\mathbf{r}$ геометрически помещается в кляксу. Если $r/l > e^{\mu_1}$, то результат усреднения экспоненциально мал. Если $e^{\mu_1} > r/l > e^{\mu_2}$, то клякса геометрически является тонким волокном с поперечными размерами e^{μ_2} и e^{μ_3} с точки зрения масштаба r/l . Ненулевой вклад в среднее вносит телесный угол $\sim e^{\mu_2+\mu_3}/(r/l)^2$. Если $e^{\mu_2} > r/l > e^{\mu_3}$, то клякса геометрически является блином с точки зрения масштаба r/l . Ненулевой вклад в среднее вносит телесный угол $\sim e^{\mu_3}/r/l$. Наконец, если $e^{\mu_3} > r/l$, то при любом направлении вектора $\mathbf{r}'$ экспонента равна почти единице, а искомая доля телесного угла равна единице. Объединить в одну формулу полученные результаты можно следующим образом:

$$\left\langle \exp \left(-\frac{(\hat{\mathcal{R}}\mathbf{r})^T \hat{\mathcal{M}}^{-1}(\hat{\mathcal{R}}\mathbf{r})}{2l^2} \right) \right\rangle_{ang} \sim \exp \left(-\chi(a - \mu_2) - \chi(a - \mu_3) \right) \theta(\mu_1 - a), \quad (4.63)$$

где $a = \ln(r/l)$, а функция Хевисайда $\theta(x)$ и функция $\chi(x)$ определены после (4.50). Для двумерного течения второе слагаемое под экспонентой в правой части (4.63) следует опустить.

Теперь проведём усреднение в (4.62) по статистике степеней деформации кляксы, или, что тоже самое, по статистике матрицы $\hat{\mathcal{M}}$. Используя связь (4.50) между степенями растяжения кляксы с учётом диффузии и собственными значениями аффинного преобразования $\hat{W}$, выразим усредняемое выражение в (4.62) через экспоненты ϱ_i . В ходе выкладок будем пользоваться тождеством

$$-\chi(a - \mu_i) = \mu_i - a' - \chi(\varrho_i - a'), \quad a' = \max(a, -a_\kappa), \quad (4.64)$$

которое получено с учётом (4.50) и предположения о монотонной динамике $\varrho_i(t)$ на оптимальной флуктуации. В результате корреляционная функция (4.62) есть результат усреднения

$$F(t, \mathbf{r}) \sim \left\langle \exp \left(-2a' - \varrho_1 - \chi(\varrho_2 - a') - \chi(\varrho_3 - a') \right) \theta(\varrho_1 - a) \right\rangle_\sigma. \quad (4.65)$$

Ответ, таким образом, зависит от соотношения r и диффузионного масштаба r_κ . На малых расстояниях $r < r_\kappa$ корреляционная функция совпадает с одно-точечным

квадратичным средним. На расстояниях больше диффузионного масштаба, $r > r_\kappa$, корреляционная функция перестаёт зависеть от коэффициента диффузии. Теперь используем меру усреднения (4.19) и получим

$$F(t, \mathbf{r}) \sim \int d\xi_1 d\xi_2 \frac{\sqrt{|\partial_{\alpha\beta} S|} \tau \theta(\xi_1 - \xi_2) \theta(\xi_2 - \xi_3))}{2\pi} \times \theta(\xi_1 - \xi'_r) \times \quad (4.66)$$

$$\times \exp\left(-\tau\left(S(\xi_1, \xi_2) + 2\xi'_r + \xi_1 + \chi(\xi_2 - \xi'_r) + \chi(\xi_3 - \xi'_r)\right)\right).$$

где $\xi'_r = \tau^{-1} \max(a, -a_\kappa)$. Выражение (4.66) является универсальным в том смысле, что позволяет определить корреляционную функцию при любой статистике поля скорости, то есть для любой энтропийной функции S . Разбор всех возможных вариантов поведения и асимптотик двойного интеграла (4.66) при произвольной энтропийной функции потребовало бы значительных усилий и места, что представляется неоправданным с точки зрения демонстрации принципа вычислений подобных интегралов.

Для того, чтобы довести вычисления до окончательного ответа, выберем конкретный вид энтропийной функции S , соответствующий модели коротко-коррелированного во времени поля скорости. В Приложении Б разобрана эта модель. Энтропийная функция для трёх-мерного течения оказывается равной

$$S(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - 1)^2 + (\xi_1 - 1)\xi_2 + \xi_2^2. \quad (4.67)$$

Получаем, что при $\tau \gg 1$ максимум экспоненты в интеграле (4.66) с учётом наложенных ограничений достигается при следующих значениях $\xi_{1,2}$

$$\begin{aligned} \xi'_r < -1 : \quad & \xi_1 = 1, & \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = -1 > \xi'_r; \\ -1 < \xi'_r < -\frac{1}{3} : \quad & \xi_1 = \frac{1 - \xi'_r}{2}, & \xi'_r < \xi_2 = -\frac{1 + \xi'_r}{2} < 0; \\ -\frac{1}{3} < \xi'_r < \frac{1}{3} : \quad & \xi_1 = \frac{1 - \xi'_r}{2} > \xi'_r, & \xi_2 = \xi'_r; \\ \frac{1}{3} < \xi'_r : \quad & \xi_1 = \xi'_r, & \xi_2 = \frac{1 - \xi'_r}{2} < \xi'_r. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Значение экспоненты в (4.66) на последних трёх асимптотиках (4.68) задаётся одним и тем же выражением $-3\tau(1 + \xi'_r)^2/4$, которое могло бы быть полученным

путём интегрирования (4.61) с функцией S (4.67). В итоге, результат интегрирования (4.66) имеет вид

$$F(t, \mathbf{r}) \sim \begin{cases} \xi'_r < -1 : & 1, \\ \xi'_r > -1 : & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\tau}} \exp\left(-\frac{3\tau}{4}(1 + \xi'_r)^2\right), \end{cases} \quad (4.69)$$

где, напомним, $\xi'_r = \tau^{-1} \max(a, -a_\kappa)$. Численный коэффициент в случае $\xi'_r > -1$ был восстановлен исходя из значения интеграла Коррзина (4.37) для распределения (4.42), который при интегрировании по переменной ξ'_r набирается вблизи $r \sim l e^\tau$.

Результат (4.69) мог быть получен и непосредственно решением уравнения на парную корреляционную функцию F . В пределе коротко-коррелированного по времени поля скорости она удовлетворяет уравнению, см. Уравнение (B.1) в Приложении B,

$$\partial_t F = \frac{\lambda}{3} \left((r \partial_r)^2 + 3r \partial_r \right) F + \frac{2\kappa}{r} \partial_r^2 r F. \quad (4.70)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в случае, когда диффузией можно пренебречь, то есть в (4.69) оказывается реализован предел $\xi'_r > -1$ с $\xi'_r = (\tau)^{-1} \ln(r/l)$, а в правой части (4.70) пренебрежимо мало последнее слагаемое, функция $F(t, \mathbf{r})$ (4.69) удовлетворяет уравнению (4.70).

Двумерный поток

Повторим вычисления для двумерного потока. Аналогом результата усреднения по углам (4.63) является

$$F(t, \mathbf{r}) \sim \left\langle \exp\left(-\chi(a - \mu_2)\right) \theta(\varrho - a) \right\rangle_\sigma. \quad (4.71)$$

Оптимальным флуктуациям соответствует монотонный рост степень растяжения $\varrho(t)$, аналогом (4.65) является

$$F(t, \mathbf{r}) \sim \left\langle \exp\left(-\chi(\varrho + a')\right) \theta(\varrho - a) \right\rangle_\sigma. \quad (4.72)$$

Аналогом интеграла, производящего усреднение по степени растяжения (4.66), является

$$F(t, \mathbf{r}) \sim \int_{\max(0, \xi'_r)} d\xi \frac{\sqrt{S''} \tau}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tau(S(\xi) + \chi(\xi + \xi'_r))\right), \quad (4.73)$$

где был учтён вид распределения плотности вероятности (4.20). Энтропийная функция для двумерного течения в модели коротко-коррелированного по времени поля скорости равна и удовлетворяет симметрии

$$S(\xi) = \frac{(\xi - 1)^2}{2}, \quad S(-\xi) = S(\xi) + 2\xi. \quad (4.74)$$

Как можно показать [210], симметрия (4.74) выполняется и в более общем случае, если статистика градиента поля скорости симметрична по отношению к операции обращения времени. Интеграл (4.73) с энтропийной функцией (4.74) набирается вблизи точек

$$\begin{aligned} \xi'_r < -1 : \quad & \xi = -1, \\ -1 < \xi'_r < 0 : \quad & \xi = -\xi'_r, \\ \xi'_r > 0 : \quad & \xi = \xi'_r. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Зависимости F на последних двух асимптотиках в (4.75) могут быть объединены в одну с использованием симметрии (4.74). Аналогом (4.69), таким образом, является

$$F(t, \mathbf{r}) \sim \begin{cases} \xi'_r < -1 : & 1, \\ \xi'_r > -1 : & \frac{\sqrt{S''} \exp(-\tau S(-\xi'_r))}{\sqrt{2\pi\tau}} = \frac{\sqrt{S''}}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{2}(1 + \xi'_r)^2\right). \end{cases} \quad (4.76)$$

Пусть, в частности, времена достаточно большие, так что $a_\kappa/\tau \ll 1$, и мы находимся под диффузионным пределом, $r \lesssim r_\kappa$. Тогда экспонента во второй строчке (4.76) может быть разложено до первого порядка по a_κ , так что корреляционная функция в совпадающих точках $F(t, 0) \sim (l/r_\kappa) \exp(-\tau/2)$. В этой же модели уравнение (B.1) в случае $d = 2$ приобретает вид

$$\partial_t F = \frac{\lambda}{2} \left((r \partial_r)^2 + 2r \partial_r \right) F + \frac{2\kappa}{r} \partial_r r \partial_r F. \quad (4.77)$$

Когда мы находимся в области $\xi'_r > -1$, диффузией можно пренебречь, и функция (4.76) действительно удовлетворяет уравнению (4.77) с $\kappa = 0$.

4.4 Корреляционная функция четвёртого порядка в статистически изотропном течении

Парная корреляционная функция не отображает важной особенности пространственного распределения пассивного скаляра. А именно, она не улавливает сильно анизотропное его распределение для каждой конкретной реализации скорости течения. Это распределение почти однородно вдоль направления растяжения и быстро изменяется вдоль направления сжатия. Схематично оно изображено на Рисунке 4.1. Для частично усреднённой парной корреляционной функции (4.41) эта анизотропия имеет место, однако для полностью усреднённой функции F (4.33) она полностью теряется, см. например (4.66). Не так обстоит дело с корреляционной функцией четвёртого порядка F_4 . Если её точки можно разделить на две пары, в которых соединяющие точки отрезки параллельны друг другу, то значение F_4 оказывается намного больше, чем для произвольного расположения точек. Это мы называем угловой особенностью корреляционной функции четвёртого порядка, которая выражает собой факт полосчатого распределения скаляра в пространстве.

Частично усреднённая корреляционная функция четвёртого порядка

$$\mathcal{F}_4(t, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \left\langle \vartheta(t, \mathbf{R}_1) \vartheta(t, \mathbf{R}_2) \vartheta(t, \mathbf{R}_3) \vartheta(t, \mathbf{R}_4) \right\rangle_f \quad (4.78)$$

выражается через парные корреляционные функции (4.29),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4(t, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = & \mathcal{F}(t, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \mathcal{F}(t, \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4) + \\ & + \mathcal{F}(t, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3) \mathcal{F}(t, \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_4) + \\ & + \mathcal{F}(t, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_4) \mathcal{F}(t, \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3), \end{aligned} \quad (4.79)$$

вследствие предположенной нами гауссовости статистики пассивного скаляра, см. Пункт 4.2.2. Если поток имеет линейный в пространстве профиль вида (4.2), то динамика каждого слагаемого в правой части (4.79) оказывается независимой, см. [207] и уравнение (B.10) в Приложении B.1. Каждое же слагаемое зависит только от двух линейных комбинаций векторов $\mathbf{R}_\mu$: например, первое слагаемое зависит только от $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ и $\mathbf{r}_{43} = \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_3$. Эта зависимость останется и после усреднения по статистике скорости. Всего есть три переменных, характеризующих взаимное расположение векторов $\mathbf{r}_{21}$ и $\mathbf{r}_{43}$ — их абсолютные значения $|\mathbf{r}_{21}|$, $|\mathbf{r}_{43}|$ и

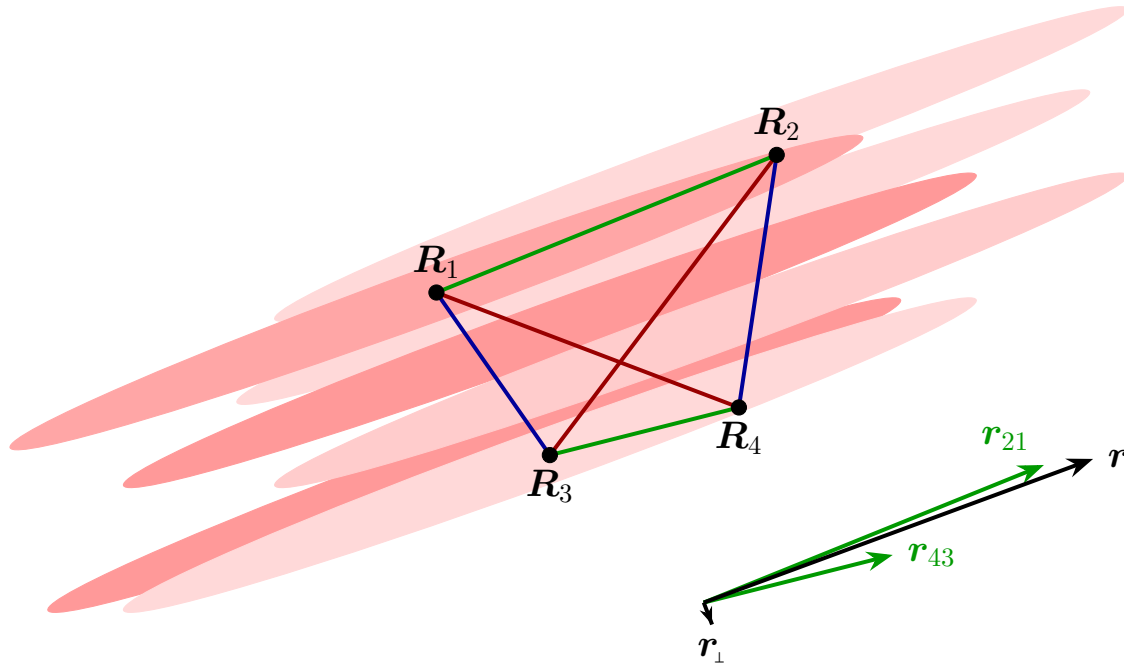


Рисунок 4.1 — Схематическое изображение разделения надоусреднённой корреляционной функции 4-го порядка на сумму произведений парных средних (4.79).

угол θ между ними, который, по определению, меняется в пределах $0 \leq \theta < \pi$. Кроме того, есть угловые переменные, описывающие ориентацию этой пары векторов в пространстве, от которых корреляционная функция F_4 не зависит, если поток имеет изотропную статистику. В этом месте напомним, что парная корреляционная функция F зависит только от одного параметра — расстояния между точками r , см. Пункт 4.3, который в ходе установления связи со статистикой лагранжевых траекторий отождествлялся с расстоянием между двумя близкими лагранжевыми траекториями. Зависимость первого слагаемого в правой части (4.79) от трёх параметров означает, что это слагаемое после усреднения по статистике скорости должно определяться поведением не только главной степени растяжения ϱ , но также следующей степенью ϱ_2 и начальным этапом динамики на временах $\tau \lesssim 1$. В двумерном случае эти параметры полностью описывают матрицу $\hat{W}$ с точностью до стоящего слева общего поворота. Поэтому, например, уравнение на плотность функции распределения параметров ϱ , χ , параметризующих матрицу $\hat{W}$, см. Приложение Б.2, соответствует уравнению в этих переменных на корреляционную функцию, см. Приложение В.2.2. Решение этого уравнения выражается в через функцию Макдональда [211], что делает его использование технически относительно несложным.

В нашем исследовании, однако, мы используем другие переменные, поскольку они оказываются более удобными при упрощающем предположении об “одномасштабности” начальных условий, так что недоусреднённая парная корреляционная функция имеет гауссову пространственную зависимость, см. (4.41). Рассмотрим процесс усреднения по статистике поля скорости первого слагаемого в (4.79), которое для краткости будем обозначать также $\mathcal{F}_4$. Процесс усреднения остальных слагаемых, очевидно, аналогичен. Первое слагаемое в (4.79) есть

$$\mathcal{F}_4 \equiv \mathcal{F}(t, \mathbf{r}_{12}) \mathcal{F}(t, \mathbf{r}_{43}) = \frac{1}{\det \hat{I}} \exp \left(-\frac{\text{tr}(\hat{R} \hat{I}^{-1})}{2l^2} \right) = \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) \mathcal{F}(t, \mathbf{r}_\perp), \quad (4.80)$$

$$\hat{R} = \mathbf{r}_{21} \mathbf{r}_{21}^T + \mathbf{r}_{43} \mathbf{r}_{43}^T,$$

где мы подставили гауссов пространственный профиль для частично усреднённой парной корреляционной функции (4.41). Матрица $\hat{R}$ имеет ранг не более 2. Два её ненулевых собственных значения положительны, обозначим их r^2 и $r_\perp^2$. Введём вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_\perp$, по абсолютному значению равные r и $r_\perp$ и являющиеся собственными для матрицы $\hat{R}$. Описанные геометрические построения изображены на Рисунке 4.1. Мы видим, что в силу предположенного гауссового вида пространственного профиля у частично усреднённой корреляционной функции $\mathcal{F}$ (4.41) (т.е. “одномасштабности” начального распределения скаляра) выражение (4.80) оказывается зависящим только от собственных значений матрицы $\hat{R}$ (помимо угловой переменной), т.е. только от двух из трёх переменных, задающих взаимное расположение векторов $\mathbf{r}_{21}$ и $\mathbf{r}_{43}$. В качестве этих переменных двух возможно выбрать

$$\Upsilon = \frac{\sqrt{\det \hat{R}}}{l^2} = \frac{r r_\perp}{l^2} = \frac{|\mathbf{r}_{21}| |\mathbf{r}_{43}| \sin \theta}{l^2}, \quad \zeta = \frac{\text{tr} \hat{R}}{2l^2} = \frac{r^2 + r_\perp^2}{2l^2} = \frac{|\mathbf{r}_{21}|^2 + |\mathbf{r}_{43}|^2}{2l^2}. \quad (4.81)$$

Геометрический смысл Υ есть площадь параллелограмма, натянутого на вектора $\mathbf{r}_{21}$ и $\mathbf{r}_{43}$, тогда как ζ есть “момент инерции” этого параллелограмма. Всегда должны выполняться условия

$$0 \leq \Upsilon \leq \zeta. \quad (4.82)$$

Начальным состоянием корреляционной функции согласно (4.38) является

$$F_4(t = 0) = \exp(-\zeta). \quad (4.83)$$

В дальнейшем мы рассматриваем предел $r \gg r_\perp$, для которого приближённо имеем $\zeta \approx r^2/2l^2$, т.е. ζ не зависит от $r_\perp$. Введём логарифмы расстояний a , $a_\perp$ по

правилу, данному после (4.63). В рассматриваемой области параметров

$$\ln \zeta = 2a = 2 \ln \frac{r}{l}, \quad \ln \Upsilon = a + a_{\perp} = \ln \frac{rr_{\perp}}{l^2}. \quad (4.84)$$

4.4.1 Трёх-мерный поток

В трёх-мерном потоке возможно установить прямую аналогию связи (4.60) для четырёх-точечной корреляционной функции. Приступим к нахождению этой связи. Часть (4.80) корреляционной функции (4.78) удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \mathcal{F}_4 + \sigma_{ik} r_{21k} \partial_{21i} \mathcal{F}_4 + \sigma_{ik} r_{43k} \partial_{43i} \mathcal{F}_4 = 2\kappa (\Delta_{21} + \Delta_{43}) \mathcal{F}_4, \quad (4.85)$$

сравни с (4.32). Повторим наши рассуждения в пределе нулевой диффузии, проделанные для парной корреляционной функции. В этом пределе и в предположении “одномасштабности”

$$\mathcal{F}_4 = \Theta \left(\sqrt{\text{tr}((\hat{W}\hat{W}^T)^{-1}\hat{R})} \right), \quad (4.86)$$

сравни с (4.54). Значение (4.86) остаётся неизменным, если положить, что вектора $\mathbf{r}_{21,43}$ сами движутся под действием аффинного преобразования $\hat{W}$,

$$\hat{R} = \hat{W}(\hat{\mathbf{r}}_{21}(0)\mathbf{r}_{21}^T(0) + \mathbf{r}_{43}(0)\mathbf{r}_{43}^T(0))\hat{W}^T. \quad (4.87)$$

Поэтому в трёх-мерном случае динамика $F_4(t, r, r_{\perp})$ совпадает с динамикой функции распределения логарифмических степеней растяжения $\mathcal{P}(t, \varrho, \varrho_2)$, если положить $\varrho = \ln(r/l)$ и $\varrho_2 = \ln(r_{\perp}/l)$. Отметим, что связь $A = \exp(\varrho + \varrho_2)$ между площадью поверхности $A = rr_{\perp}/l^2$, натянутой на вектора $\mathbf{r}_{21,43}$, и плотностью функции распределения $\mathcal{P}$, была установлена в [212]. При исследовании угловых особенностей F_4 нас интересует предел $r_{\perp} \ll r$. С учётом якобиана перехода от $\mathbf{r}_{1,2}$ к ϱ, ϱ_2 при изотропной статистике и выбранных нормировках, получаем

$$P(t, \varrho, \varrho_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^4 \left(\frac{r_{\perp}}{l} \right)^2 F_4(t, r, r_{\perp}), \quad F_4(t, r, r_{\perp}) = \langle \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) \mathcal{F}(t, \mathbf{r}_{\perp}) \rangle_{\sigma} \quad (4.88)$$

в качестве обобщения (4.60), где под F_4 понимается только одно из слагаемых (первое) в (4.79). Выражение для диффузионного слагаемого (4.85) есть $\kappa(\partial_r^2 +$

$(1/r)\partial_r + (\partial/\partial r_\perp)^2)F_4$ в пределе $r \gg r_\perp$, поэтому угловая особенность в связи (4.88) нарушается, когда $r_\perp \lesssim r_k$.

Докажем связь (4.88) и непосредственными вычислениями, как это было проделано выше для парной корреляционной функции F . Динамика координат $\hat{R}$, задающихся уравнением (4.87), совпадает с динамикой $\hat{I}$ (4.39) с нулевой диффузией $\kappa = 0$; при этом ортогональные матрицы $\hat{\mathcal{R}}$ (4.51) и $\hat{\mathcal{N}}$ (4.11) совпадают, $\hat{I} = \hat{W}\hat{W}^T$ и $\mu_i = \varrho_i$ [42]. Определим единичные собственные векторы $\mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$ матрицы $\hat{R}$ согласно равенствам

$$\hat{R}\mathbf{n} = r^2\mathbf{n}, \quad \hat{R}\mathbf{l} = r_\perp^2\mathbf{l}, \quad \mathbf{m} = [\mathbf{n} \times \mathbf{l}]. \quad (4.89)$$

Тогда матрица $\hat{\mathcal{N}} = (\mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$. Расширим определение $\hat{\Omega}^n$ (4.13), положив

$$\hat{\omega}^n = \partial_t \hat{\mathcal{N}} \hat{\mathcal{N}}^T, \quad \boldsymbol{\omega}^n = \hat{\mathcal{N}} \boldsymbol{\Omega}^n, \quad \omega_i^n = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{jk}^n. \quad (4.90)$$

Из данных определений, в частности, следует тождество $\hat{\omega}^n \mathbf{r} = [\boldsymbol{\omega}^n \times \mathbf{r}]$. Покомпонентно уравнения (4.14) имеют вид

$$\dot{\varrho} = \sigma_{ik} n_i n_k, \quad \dot{\varrho}_2 = \sigma_{ik} l_i l_k. \quad (4.91)$$

Далее, в пределе сильного растяжения $e^\varrho \gg e^{\varrho_2} \gg e^{\varrho_3}$ уравнение (4.16) в терминах векторов (4.89) имеет вид

$$\Omega_1^n = \sigma_{ik} m_i l_k, \quad \Omega_2^n = -\sigma_{ik} m_i n_k, \quad \Omega_3^n = \sigma_{ik} l_i n_k, \quad (4.92)$$

Иными словами, угловая скорость вращения векторов $\mathbf{r}_{1,2}$ есть

$$\boldsymbol{\omega}^n = m_i \sigma_{ik} \ell_k \mathbf{n} - m_i \sigma_{ik} n_k \mathbf{l} + \ell_i \sigma_{ik} n_k \mathbf{m}. \quad (4.93)$$

Уравнение $\dot{\mathbf{n}} = [\boldsymbol{\omega}^n \times \mathbf{n}]$, как и должно быть, совпадает с уже выписанным ранее (4.55). Ниже нам также потребуется следующее уравнение

$$\dot{\mathbf{l}} = [\boldsymbol{\omega}^n \times \mathbf{l}] = m_i \sigma_{ik} l_k \mathbf{m} - l_i \sigma_{ik} n_k \mathbf{n}. \quad (4.94)$$

Построим теперь уравнение на функцию совместного распределения $\wp(t, \varrho, \varrho_2, \hat{\mathcal{N}})$ как обобщение уравнения (4.56). Будем формально считать взаимно ортогональные единичные вектора $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$ независимыми. В этом случае при выводе аналога уравнения (4.56) необходимо исключить дифференцирование не только в направлении изменения абсолютных значений векторов $\mathbf{n}, \mathbf{l}$, но и вдоль

направления изменения их скалярного произведения $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) = 0$. Эти ограничения проводят к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \partial_t \wp &= -\partial_\varrho(\dot{\wp}) - \partial_{\varrho_2}(\dot{\wp}_2) - \\ &- \left(m_i m_k \frac{\partial}{\partial n_k} + \frac{l_i}{2} \left(l_k \frac{\partial}{\partial n_k} - n_k \frac{\partial}{\partial l_k} \right) \right) (\dot{n}_i \wp) - \\ &- \left(m_i m_k \frac{\partial}{\partial l_k} + \frac{n_i}{2} \left(n_k \frac{\partial}{\partial l_k} - l_k \frac{\partial}{\partial n_k} \right) \right) (\dot{l}_i \wp). \end{aligned} \quad (4.95)$$

Преобразуем угловые вклады в (4.95), подставив (4.55, 4.94) и приняв во внимание, что третий единичный вектор $\mathbf{m}$ определён в (4.89):

$$\begin{aligned} \partial_t (\wp e^{-4\varrho-2\varrho_2}) &= -\partial_\varrho (n_i \sigma_{ik} n_k \wp e^{-4\varrho-2\varrho_2}) - \partial_{\varrho_2} (l_i \sigma_{ik} l_k \wp e^{-4\varrho-2\varrho_2}) - \\ &- \left(m_i \sigma_{ik} l_k m_n \frac{\partial}{\partial l_n} + m_i \sigma_{ik} n_k m_n \frac{\partial}{\partial n_n} + l_i \sigma_{ik} n_k \left(l_n \frac{\partial}{\partial n_n} - n_n \frac{\partial}{\partial l_n} \right) \right) (\wp e^{-4\varrho-2\varrho_2}). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Структура (4.96) аналогична структуре уравнения (4.57): в первое строке (4.96) стоят полные производные по степеням растяжения, а последняя строчка есть скалярное произведение угловой скорости вращения (4.93) и генератора трёхмерных вращений. Переход к переменным $r_{21,43}$ для получения уравнения вида (4.85) с нулевой правой частью должен учитывать, что $\mathcal{F}_4$ (4.80) зависит только от переменных r , r_1 , т.е. производная

$$(r_{21i} \partial_{43i} - r_{43i} \partial_{21i}) \mathcal{F}_4 = 0. \quad (4.97)$$

Дальнейший прямой вывод (4.85) из уравнения (4.96) был бы технически достаточно громоздким. Вместо этого заметим, что операторы, действующие на $\wp e^{-4\varrho-2\varrho_2}$ в правой части (4.96), имеют степень нуль по абсолютным значениям $r_{21,43}$ векторов $\mathbf{r}_{21,43}$, если приравнять $l e^\varrho = r$ и $l e^{\varrho_2} = r_1$. Первая строчка в (4.96) соответствует первому слагаемому в (4.57). Второму слагаемому в (4.57) соответствует вторая строчка в (4.96), поскольку в ней дифференциальные операторы есть операторы поворота вокруг $\mathbf{n}$ -, $\mathbf{l}$ - и $\mathbf{m}$ -осей соответственно. Таким образом, и в этом смысле структуры (4.57) и (4.96) совпадают. Поэтому следует положить $\mathcal{F}_4 = \wp e^{-4\varrho-2\varrho_2}$; в этом равенстве коэффициенты в экспонентах совпадают со значением показателей степеней в (4.88), что доказывает (4.88).

4.4.2 Двумерный поток

В двумерном случае связь не имеет места, поскольку отсутствует третье направление, так что степень растяжения по второму направлению ϱ_2 является зависимой величиной, $\varrho_2 = \varrho$. Связь между F_4 и статистикой плотности распределения степени растяжения $\mathcal{P}(t, \varrho)$ становится менее универсальной. Мы потому будем проводить вычисления предполагая, что применим путь поиска оптимальной флуктуации, апробированный на парной корреляционной функции F в Пункте 4.3.1. В частности, мы примем, что времена перемешивания достаточно большие для того, чтобы плотность распределения имела автомодельный вид (4.20).

Начнём вычисления. Для того, чтобы оба множителя в последней форме представления $\mathcal{F}_4$ (4.80) одновременно не были исчезающе малы, требуется, чтобы $\exp(\mu_1) \gtrsim r/l$ и $\exp(\mu_2) \gtrsim r_1/l$. Теперь, как это было с парной корреляционной функцией, начнём с усреднения по матрице поворота $\hat{\mathcal{R}}$ (4.51). В среднее вносят не исчезающе малый вклад те ориентации эллипса с полуосями $l \exp(\mu_1)$ и $l \exp(\mu_2)$, при которых в нём уместится пара ортогональных друг другу векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$. Только малая доля поворота эллипса вносит существенный вклад в среднее, если $\exp(\mu_2) < r/l$. Эта доля поворота равна $(l/r) \exp(\mu_2)$. Таким образом, зависящая от угла часть выражения (4.80) редуцируется до

$$\left\langle \exp \left(-\frac{\text{tr}(\hat{R} \hat{I}^{-1})}{2l^2} \right) \right\rangle_{ang} \sim \exp \left(-\chi(a - \mu_2) \right) \theta(\mu_1 - a) \theta(\mu_2 - a_1), \quad (4.98)$$

где a и a_1 определены в (4.84). Выражение (4.98) следует сравнить с аналогичным выражением (4.63) в случае парной корреляционной функции.

Теперь приступим к усреднению по статистике растяжений кляксы. С учётом предэкспоненты в (4.41) получаем

$$F_4 \sim \left\langle \exp \left(-2\varrho_1 - 2\mu_2 - \chi(a - \mu_2) \right) \theta(\varrho_1 - a) \theta(\mu_2 - a_1) \right\rangle. \quad (4.99)$$

Оптимальные флуктуации в общем случае не соответствуют монотонному во времени изменению степеней растяжения ϱ_i . Поэтому мы остановились на общем выражении (4.99), в котором фигурируют μ_i , поскольку в общем случае невозможно получить их универсальной связи с ϱ_i . Действительно, перенос двумерным несжимаемым потоком сохраняет площадь, натянутую на любой жидкий

контур. Это означает, в частности, что, площадь Υ (4.81) остаётся неизменной, если полагать, что вектора $\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{43}$ переносятся потоком, а диффузия отсутствует. Следовательно, если пренебречь молекулярной диффузией, то у корреляционной функции четвёртого порядка F_4 должна отсутствовать динамика по Υ . Поскольку начальное состояние (4.83) не зависит от Υ внутри области определения (4.82), то и в последующие моменты времени F_4 должна зависеть только от ζ . Это утверждение означает, что области $a_{\perp} < \mu_2$ ненулевых значений (4.99) это выражение не зависит от $r_{\perp}$. С другой стороны, если мы рассмотрим область $\Upsilon \gg 1$, что соответствует $rr_{\perp} \gg l^2$, то в силу ограничения (4.82) корреляционная функция F_4 окажется исчезающе малой, если не учитывать влияние диффузии, а если $r_{\perp} > r_{\kappa}$, то следует учесть и немонотонность динамики $\varrho(t)$ согласно (4.99).

Определим теперь условие, при котором применима техника усреднения (4.99), основанная на поиске оптимально флуктуации. Характерным масштабом для экспонент ϱ_i является $a_{\kappa} = \ln \sqrt{\text{Pe}}$ (4.50). Характерные флуктуации $\delta \varrho_i$ на фоне оптимальной флуктуации должны быть малы по сравнению с этим масштабом. Согласно рассуждениям после уравнения (4.21), их величина $\delta \varrho_i \sim \sqrt{\tau}$. Поэтому условием применимости концепции оптимальной флуктуации является

$$\delta \varrho \ll a_{\kappa}, \quad \Rightarrow \quad \tau \ll (\ln \text{Pe})^2 = 4a_{\kappa}^2. \quad (4.100)$$

Поскольку мы считаем число Пекле экспоненциально большим, $\ln \text{Pe} \gg 1$, то мы в дальнейшем ограничиваемся рассмотрением только не слишком больших времён (4.100).

Далее конкретные вычисления будем проводить для модели коротко-коррелированного во времени поля скорости. Рассмотрим сначала предел, когда диффузией можно пренебречь. Тогда ненулевой (т.е. не экспоненциально малый) результат для (4.99) получается только тогда, когда $\Upsilon \lesssim 1$, т.е. $a + a_{\perp} < 0$, см. определения (4.84). Результат усреднения (4.99) с весом, задаваемым энтропийной функцией (4.74), определяется значениями $\varrho \approx a$ если $a > 0$. В итоге приходим к тому, что

$$\begin{aligned} 0 < a < a_{\kappa}, \\ a + a_{\perp} < 0 : \end{aligned} \quad F_4 \sim \exp \left(-\frac{\tau}{2} (1 + \xi)^2 \right), \quad (4.101)$$

где, напомним, $\xi = a/\tau = \tau^{-1} \ln(r/l)$. Выражение (4.101) по порядку величины совпадает с выражением для парной корреляционной функции (4.76). Ответ (4.101) верен только при не слишком больших расстояниях $r < l^2/r_{\kappa}$, поскольку в противном случае диффузионный масштаб r_{κ} будет достигнут меньшим размером

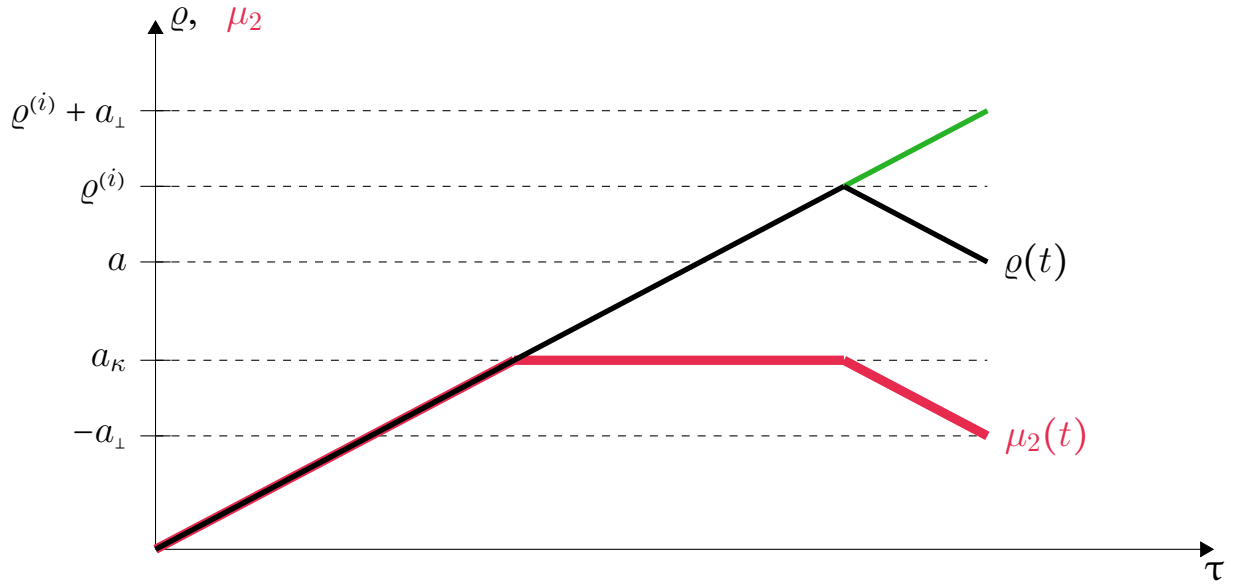


Рисунок 4.2 — Оптимальная флуктуация, формирующая корреляционную функцию скаляра четвёртой степени. Максимальное значение степени растяжения

$$\varrho^{(i)} = a_{\kappa} + a + a_{\perp}.$$

кляксы $le^{-\mu_2}$. На промежуточной асимптотике $r \ll e^{\tau}$ решение (4.101) спадает обратно пропорционально расстоянию и экспоненциально во времени,

$$F_4 = \frac{e^{-\tau/2}}{\sqrt{4\pi\tau}r}. \quad (4.102)$$

Отметим здесь, что если условие (4.100) не выполнено, то результат (4.101) усреднения изменяется и становится зависящим от коэффициента диффузии.

Пусть теперь, наоборот, диффузионный масштаб уже достигнут меньшим размером кляксы, то есть считаем, что $r \gg l^2/r_{\kappa}$. Рассмотрим сначала коллинеарную геометрию, когда длина меньшего из векторов находится под диффузионным масштабом, $r_{\perp} \lesssim r_{\kappa}$. Результат усреднения (4.99) по-прежнему определяется значениями $\varrho \approx a > a_{\kappa}$, так что

$$\begin{aligned} a &> a_{\kappa}, \\ a_{\perp} &\lesssim -a_{\kappa}: \end{aligned} \quad F_4 \sim \frac{l^2}{r_{\kappa}r} \exp\left(-\frac{\tau}{2}(1+\xi)^2\right). \quad (4.103)$$

В (4.103) присутствует дополнительный малый алгебраический множитель по сравнению с (4.101), т.е. функция F_4 оказывается малой по сравнению с парной корреляционной функцией F .

Далее рассмотрим нарушение коллинеарности в условиях существенного влияния диффузии, когда $r_{\kappa} \ll r_{\perp} \ll r$ при $rr_{\perp} \gg l^2$. С одной стороны, неравенство $rr_{\perp}/l^2 \gg 1$ предполагает вследствие наличия θ -функций в (4.99), что

$\varrho_1 + \mu_2 = a + a_\perp > 0$, т.е. что диффузионный масштаб r_κ уже существенно достигнут меньшим размером кляксы le^{μ_2} . С другой стороны, в момент наблюдения этот меньший размер существенно превышает диффузионный масштаб, $le^{\mu_2} \gtrsim r_\perp \gg r_\kappa$. Это означает, что оптимальная флуктуация характеризуется немонотонным поведением степени растяжения $\varrho(t')$, $t' < t$: сначала она вырастает до значения $\varrho^{(i)} = a + a_\perp + a_\kappa$ в некоторый промежуточный момент $\tau^{(i)}$, $\varrho(\tau^{(i)}) = \varrho^{(i)}$, а затем падает на величину $a_\perp + a_\kappa$ до значения $\varrho(t) = a$. В результате падения меньший размер вырастает от диффузионного масштаба r_κ до конечного размера $r_\perp$. На Рис. 4.2 оптимальная флуктуация для $\varrho(t')$ изображена чёрным цветом, а для $\mu_2(t')$ — розовым. Отметим, что соотношение между a и a_κ в этих рассуждениях может быть произвольным.

По промежуточному времени $\tau^{(i)}$ следует провести оптимизацию. Однако непосредственно этого делать нет нужды, поскольку благодаря симметрии функции Крамера (4.74) вес такой траектории равен вероятности траектории с монотонным ростом $\varrho_1(t')$ от нуля до $\varrho(t) = \varrho^{(i)} + a_\perp + a_\kappa = \ln(rr_\perp^2/r_\kappa^2 l)$, помноженный на фактор $(r_\kappa/r_\perp)^2$. Построенная композитная флуктуация $\varrho(t')$ изображена на Рис. 4.2 чёрно-зелёным цветом. В результате корреляционная функция оказывается равной по порядку величины

$$\begin{aligned} a + a_\perp > 0, \\ a_\perp > -a_\kappa : \end{aligned} \quad F_4 \sim \frac{l^4 r_\kappa^2}{r^3 r_\perp^3} \exp\left(-\tau S\left(\frac{a + 2a_\perp + 2a_\kappa}{\tau}\right)\right) = \quad (4.104)$$

$$= \frac{l^2 r_\perp}{r_\kappa^2 r} \exp\left(-\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{a + 2a_\perp + 2a_\kappa}{\tau}\right)^2\right).$$

Выражение (4.104) переходит непрерывно в коллинеарный предел (4.103) при $r_\perp \rightarrow r_\kappa$ в области $r \gg l^2/r_\kappa$, соответствующей существенному влиянию диффузии. Положим, что $r_\perp$ не сильно превосходит диффузионный масштаб r_κ и разложим экспоненту в (4.104) по $a_\perp + a_\kappa$:

$$F_4 \sim \frac{l^2}{r_\kappa r} \exp\left(-\frac{\tau}{2} (1 + \xi)^2\right) \cdot \left(\frac{r_\kappa}{r_\perp}\right)^{2(a+\tau)-1}. \quad (4.105)$$

Здесь первый множитель соответствует коллинеарному пределу (4.103), а второй множитель — степенной зависимости с показателем $\mu = 2(\ln(r/l) + \lambda t) - 1$.

Однако в области несущественности диффузии $r \ll l^2/r_\kappa$, т.е. $a < a_\kappa$, выражение (4.104) не переходит в (4.101) при $r_\perp \sim l^2/r$: отношение (4.104) к (4.101) оценивается как

$$\sim \exp\left(-\frac{2a_\kappa(a_\kappa - a)}{\tau}\right) \ll 1. \quad (4.106)$$

Таким образом, на расстояниях $r \ll l^2/r_k$ корреляционная функция 4-го порядка имеет резкую угловую особенность, определяющуюся начальными условиями.

Отметим, что аналогичные вычисления в трёхмерном случае, начинающиеся с выражения типа (4.99), приводят к независимости корреляционной функции F_4 при $r, r_\perp \gg r_k$.

Решение уравнения на корреляционную функцию

Пусть поле скорости является коротко-коррелированным во времени, так что его корреляционная функция имеет вид (Б.1, Б.6). Общий вид уравнения на корреляционную функцию четвёртого порядка F_4 в двумерном потоке выписан в (В.14) в терминах трёх переменных r_1, r_2, θ . Если нас интересует распадная задача, в которой важна зависимость от времени, то уравнение на F_4 оказывается весьма сложным. Поэтому мы выберем упрощающее предположение, в условиях которого корреляционная функция зависит только от двух переменных Υ и ζ (4.81). От третьей же переменной, назовём её α , корреляционная функция F_4 не зависит, если этой зависимости не было в начальный момент времени. Выберем тогда эту переменную таким образом, чтобы она менялась в фиксированных пределах не зависимо от того, какие значения имеют Υ, ζ . Возможен следующий выбор:

$$\alpha = \left(\frac{r}{r_\perp} - \frac{r_\perp}{r} \right)^{-1} \left(\frac{|\mathbf{r}_{21}|}{|\mathbf{r}_{43}|} - \frac{|\mathbf{r}_{43}|}{|\mathbf{r}_{21}|} \right) = \frac{(r_{21}^2 - r_{43}^2) \sin \theta}{\sqrt{r_{21}^4 + r_{43}^4 + 2r_{21}^2 r_{43}^2 \cos(2\theta)}}, \quad (4.107)$$

так что $-1 < \alpha < 1$ всюду внутри области определения (4.82). Отметим, что если частично усреднённая парная корреляционная функция $\mathcal{F}$ (4.41) изотропна, то вклад в корреляционную функцию четвёртого порядка F_4 (4.80) не зависит от α только в случае, если $\mathcal{F}$ имеет гауссов пространственный профиль (4.41). Таким образом, здесь мы, как и ранее, ограничиваемся рассмотрением гауссового пространственного профиля у частично усреднённой парной корреляционной функции $\mathcal{F}$ (4.41).

Предполагая, что F_4 не зависит от α , уравнение (В.14) приобретает вид

$$\frac{1}{2} \partial_\tau F_4 = \partial_\zeta (\zeta^2 - \Upsilon^2) \partial_\zeta F_4 + \frac{1}{\text{Re}} \left(\partial_\Upsilon (\zeta \partial_\Upsilon + \Upsilon \partial_\zeta) + \partial_\zeta (\Upsilon \partial_\Upsilon + \zeta \partial_\zeta) \right) F_4, \quad (4.108)$$

где число Пекле Pe , напомним, определено в (4.40). То, что коэффициенты перед производными ∂_Υ , ∂_ζ не зависят от α как раз показывает, что независимость F_4 от α остаётся инвариантом во времени. Правая часть уравнения (4.108) имеет вид полной дивергенции. Так и должно быть, поскольку i) в координатном пространстве $\mathbf{r}_{21}$, $\mathbf{r}_{43}$ правая часть уравнения на корреляционную функцию (B.11) имеет вид полной дивергенции, т.е. интеграл от F_4 с мерой $d^2r_{21} d^2r_{43}$ сохраняется во времени, а ii) якобиан перехода к новым переменным, проинтегрированный по α , является константой,

$$\int_{-1}^1 d\alpha \frac{\partial(\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{43})}{\partial(\Upsilon, \zeta, \alpha, \varphi)} = \frac{\pi l^4}{2}, \quad (4.109)$$

где φ — угол поворота биссектрисы между векторами $\mathbf{r}_{21}$ и $\mathbf{r}_{43}$, от которого F_4 не зависит в силу предположенной изотропии статистики. Следовательно,

$$\partial_t \int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^\zeta d\Upsilon F_4 = 0, \quad (4.110)$$

и потому мы будем также называть F_4 плотностью вероятности. Граничными условиями для уравнения (4.108) являются равенство нулю компоненты потока вероятности, нормальной к границе области определения $\zeta = \Upsilon > 0$, а также нормальной к границе $\Upsilon = 0$:

$$(\zeta - \Upsilon)((\zeta + \Upsilon)\partial_\zeta + Pe^{-1}(\partial_\Upsilon - \partial_\zeta))F_4|_{\zeta=\Upsilon} = 0, \quad (4.111)$$

$$(\zeta\partial_\Upsilon + \Upsilon\partial_\zeta)F_4|_{\Upsilon=0} = 0, \quad (4.112)$$

а также убывание F_4 при больших значениях Υ , ζ , достаточно быстрое для того, чтобы полная вероятность была конечной.

Область определения изображена на Рисунке 4.3. Рассмотрим сначала бездиффузионный предел для уравнения (4.108) и положим $\Upsilon = 0$, что соответствует полностью коллинеарной геометрии, характеризующейся $r_\perp = 0$:

$$\frac{1}{2}\partial_\tau F_4 = \partial_\zeta \zeta^2 \partial_\zeta F_4, \quad F_4|_{t=0} = \exp(-\zeta), \quad \zeta \partial_\zeta F_4|_{\zeta=0} = 0. \quad (4.113)$$

Пусть по определению $\ln \zeta = 2a$, что соответствует рассматриваемому нами пределу (4.84). Уравнение (4.113) переписывается в виде

$$\partial_\tau F_4 = \left(\frac{1}{2} \partial_a^2 + \partial_a \right) F_4, \quad F_4|_{t=0} = \exp(-e^{2a}), \quad (4.114)$$

решением чего на больших временах является

$$F_4 = \frac{1}{2^{5/4}\tau^{1/4}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{\tau + a}{\sqrt{2\tau}}\right). \quad (4.115)$$

При больших аргументах $x \gg 1$ функция ошибок $\operatorname{Erfc}(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi x}$, поэтому

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{4\pi(\tau + a)}} \exp\left(-\frac{(a + \tau)^2}{2\tau}\right). \quad (4.116)$$

Экспоненциальный фактор в этом выражении совпадает с ответом (4.101), полученным для этой же области параметров путём определения оптимальной флуктуации. Отметим, что полное количество вероятности

$$\int_0^\infty d\zeta F_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{\sqrt{\pi(\tau + a)}} \exp\left(-\frac{(a - \tau)^2}{2\tau}\right) = 1, \quad (4.117)$$

как это и должно быть согласно начальному условию (4.83). При этом интеграл набирается в области $a \sim e^\tau$.

Решение (4.115, 4.116) показывает, что случайное поле скорости очень быстро уносит вероятность из области $\zeta \lesssim 1$, соответствующей начальному условию (4.83), в область $\zeta \sim e^\tau \gg 1$. Ненулевое значение Υ не изменяет этой тенденции. Как мы увидим ниже, на не очень больших временах $\tau \ll a_\kappa^2$ (4.100) вероятность сконцентрирована в области $\Upsilon \ll \zeta$, что соответствует $r_\perp \ll r$. Таким образом, наиболее существенным влиянием молекулярной диффузии является перенос в Υ -направлении (увеличение $r_\perp$ при фиксированном r), т.е. член $\operatorname{Pe}^{-1}\zeta\partial_\Upsilon^2 F_4$ в уравнении (4.108). Без существенного изменения физической постановки задачи для её упрощения математической формулировки мы будем считать, что областью определения является $\zeta > 0$, $\Upsilon > 0$ вместо в действительности имеющего место (4.82). Кроме того, в первом слагаемом в правой части эволюционного уравнения (4.108) мы пренебрегаем Υ^2 по сравнению с ζ^2 . Приходим к следующему модельному уравнению:

$$\partial_\tau F_4 = \left(\frac{1}{2}\partial_a^2 + \partial_a\right) F_4 + 2\operatorname{Pe}^{-1}e^{2a}\partial_\Upsilon^2 F_4, \quad F_4|_{t=0} = \exp(-\Upsilon - \zeta), \quad (4.118)$$

Отметим, что уравнение (4.114), полученное в бездиффузионном пределе для $\zeta = 0$, есть и уравнение (4.118) при конечном числе Пекле Pe , проинтегрированное по Υ .

Решаем (4.118) методом разделения переменных. По Υ перейдём в Фурье-представление,

$$F_4 = \int_0^\infty dq \frac{\cos(q\Upsilon)}{\sqrt{\pi/2}} F_{4q}, \quad F_{4q} = \int_0^\infty d\Upsilon \frac{\cos(q\Upsilon)}{\sqrt{\pi/2}} F_4. \quad (4.119)$$

Подстановкой $F_{4q} = \exp(-(k^2 + 1)\tau/2 - a)f(\zeta, q)$ приходим к стационарному уравнению Шредингера

$$k^2 f = -\frac{1}{4} \partial_a^2 f + \text{Pe}^{-1} q^2 e^{2a} f. \quad (4.120)$$

В терминах квантовой механики это есть задача об одномерном движении массивной частицы в экспоненциальном потенциале. Дальнейшая подстановка $x = 2q\sqrt{\zeta/\text{Pe}} = 2q \exp(a - a_\kappa)$ приводит к модифицированному уравнению Бесселя на функции мнимого порядка [213, Eq. (10.45.1)]

$$(x^2 \partial_x^2 + x \partial_x - x^2 + k^2) f = 0. \quad (4.121)$$

Интересующее нас решение должно убывать в подбарьерной области (при больших положительных $\ln x$) и переходить в стоячую волну единичной амплитуды в области классического движения (при больших отрицательных $\ln x$). Оно имеет вид

$$f_{kq}(a) = -\frac{\sqrt{k \operatorname{sh}(\pi k)} K_{ik}(x)}{\pi/\sqrt{2}}, \quad (4.122)$$

$$f_{kq}|_{x, k \ll 1} = \frac{\sin(k(\ln(x/2) + \gamma_{\text{eu}}))}{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\sin(k(a - a_q))}{\sqrt{\pi/2}}, \quad (4.123)$$

где $a_q = \ln(\sqrt{\text{Pe}}/q) - \gamma_{\text{eu}}$, а константа Эйлера $\gamma_{\text{eu}} \approx 0.577$, см. [213, Eq. (10.45.7)].

Условие ортогональности базисных функций (4.122) имеет вид

$$\int_0^{+\infty} dk f_{kq}(b) f_{kq}(a) = \delta(a - b). \quad (4.124)$$

В итоге решением является

$$F_4(t, \Upsilon, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^{+\infty} dk \int_0^{+\infty} dq f_{4qk} \frac{f_{kq}(a) \cos(q\Upsilon)}{\sqrt{\pi/2}} e^{-(k^2+1)\tau/2} \quad (4.125)$$

с начальным условием

$$f_{4qk} = \int_0^\infty d\Upsilon' \int_{-\infty}^{+\infty} db \sqrt{\zeta'} e^{-\Upsilon' - \zeta'} \frac{f_{kq}(b) \cos(q\Upsilon')}{\sqrt{\pi/2}}, \quad (4.126)$$

где $2b = \ln \zeta'$. Полное выражение для решения имеет вид

$$F_4(t, \Upsilon, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^{+\infty} dk \int_0^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} db \sqrt{\zeta'} e^{-\zeta'} \frac{k \operatorname{sh}(\pi k) K_{2ik}(x) K_{2ik}(x') \cos(q\Upsilon)}{(\pi^2/4)(1+q^2)} e^{-(k^2+1)\tau/2}. \quad (4.127)$$

где мы произвели интегрирование по Υ' , фигурирующее в (4.126), и $x' = 2q\sqrt{\zeta'/\operatorname{Pe}} = 2q \exp(b - a_\kappa)$.

Для дальнейших вычислений отметим, что при $k \ll 1$ применимо приближение

$$K_{ik}(x) \approx \frac{\sin(k K_0(x))}{k}, \quad f_{kq}(\zeta) = -\frac{\sin(k K_0(x))}{\sqrt{\pi/2}} \quad \text{at } k \ll 1 \quad (4.128)$$

при любом $x > 0$. Напомним также, что функция Макдональда нулевого порядка $K_0(x)$ строго положительна при положительных значениях аргумента, а при малых и больших аргументах её асимптотическое поведение есть

$$x \ll 1: K_0(x) \approx -\ln \frac{x}{2} - \gamma_{\text{eu}} = a_q - a, \quad x \gg 1: K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \quad (4.129)$$

Воспользуемся приближением (4.128), чтобы переписать (4.127) в виде, более удобном для аналитического выполнения интегрирований:

$$F_4(t, \Upsilon, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^{+\infty} dk \int_0^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} db \sqrt{\zeta'} e^{-\zeta'} \frac{\sin(2k K_0(x)) \sin(2k K_0(x')) \cos(q\Upsilon)}{(\pi/2)(1+q^2)} e^{-(k^2+1)\tau/2}. \quad (4.130)$$

Ожидая, что $x' \ll 1$, воспользуемся приближением (4.123) и выделим отдельно интеграл по ζ' , который оказывается равным

$$\operatorname{Im} \left(e^{-ika_q} \int_0^{+\infty} d\zeta' \zeta'^{(ik-1)/2} e^{-\zeta'} \right) \approx \sin(k a_q). \quad (4.131)$$

После этого остаётся только двукратный интеграл

$$F_4(t, \Upsilon, \zeta) = \frac{1}{4\sqrt{\zeta}} \int_0^{+\infty} dk \int_0^{+\infty} dq \frac{\sin(k K_0) \sin(k a_q) \cos(q\Upsilon)}{(\pi/2)(1+q^2)} e^{-(k^2+1)\tau/2},$$

где $K_0 = K_0(x)$. Интегрирование по k приводит к однократному интегралу

$$F_4(t, \Upsilon, \zeta) = \frac{e^{-\tau/2}}{4\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^{+\infty} \frac{dq \cos(q\Upsilon)}{(\sqrt{\pi}/2)(1+q^2)} \exp\left(-\frac{K_0^2 + a_q^2}{2\tau}\right) \text{sh}\left(\frac{K_0 a_q}{\tau}\right). \quad (4.132)$$

Приступим к оценке интеграла (4.132) в различных областях параметров. Расписав $2 \text{sh}(\cdot) = \exp(\cdot) - \exp(-\cdot)$, представим правую часть (4.132) как

$$F_4(t, \Upsilon, \zeta) = F_{4+}(t, \Upsilon, \zeta) + F_{4-}(t, \Upsilon, \zeta). \quad (4.133)$$

Часть $F_{4-}(t, \Upsilon, \zeta)$ исчезает в пределе нулевой молекулярной диффузии, когда $\text{Pe} \rightarrow \infty$, при этом оставшаяся часть $F_{4+}(t, \Upsilon, \zeta)$ перестаёт зависеть от числа Пекле Pe .

В области параметров, где F_{4+} не зависит от числа Pe , эта часть плотности вероятности пропорциональна решению (4.116), полученному в пределе нулевой диффузии. Убедимся в этом. В соответствующей области параметров t, ζ, Υ аргументы sh и K_0 остаются большими в области насыщения интеграла (4.132). Тогда произведение $\exp \cdot \text{sh}$ в (4.132) не зависит от q , оказываясь равным $\exp(-a^2/(2\tau))$. Тогда дальнейшее интегрирование по q , которое определяется значениями $q_* \sim \min(1, \Upsilon^{-1})$, приводит нас к исходному фактору $\exp(-\Upsilon)$, заложенному в начальных условиях. Условие $K_0 \gg 1$ означает $\zeta \ll \text{Pe}(\Upsilon^2 + 1)$; на Рис. 4.3 эта область ограничена справа чёрной пунктирной линией. С точки зрения ограничения на ζ, Υ , это условие всегда слабее условия $K_0 a_q / \tau \gg 1$. Поэтому достаточно требовать выполнение только последнего условия, которое эквивалентно

$$\tau \ll K_0 a_{q_*} = (a_{q_*} - a) a_{q_*} \quad (4.134)$$

$$\text{or} \quad a < a_\kappa - \ln q_* - \frac{\tau}{a_\kappa - \ln q_*}, \quad (4.135)$$

где, напомним, a_κ определено в (4.50). Соответствующая область ограничена зелёной пунктирной линией на Рис. 4.3 в случае умеренно больших времён, $\tau \ll a_\kappa^2$. Напомним, что это условие уже было нами получено ранее, см. (4.100), его смысл состоит в том, чтобы при оценке плотности вероятности возможно было пользоваться приближением оптимальной флуктуации. Приходим к зависимости

$$F_{4+}(t, \Upsilon, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(a + \tau)^2}{2\tau} - \Upsilon\right). \quad (4.136)$$

что прямолинейно расширяет ранее полученное выражение (4.116), применимое для $\Upsilon = 0$. Экспоненциальная зависимость от Υ в (4.136) соответствует установленной нами ранее методом поиска оптимальной флуктуации δ -функционально-подобной зависимости от $r_\perp$, см. (4.101) и (4.104, 4.106).

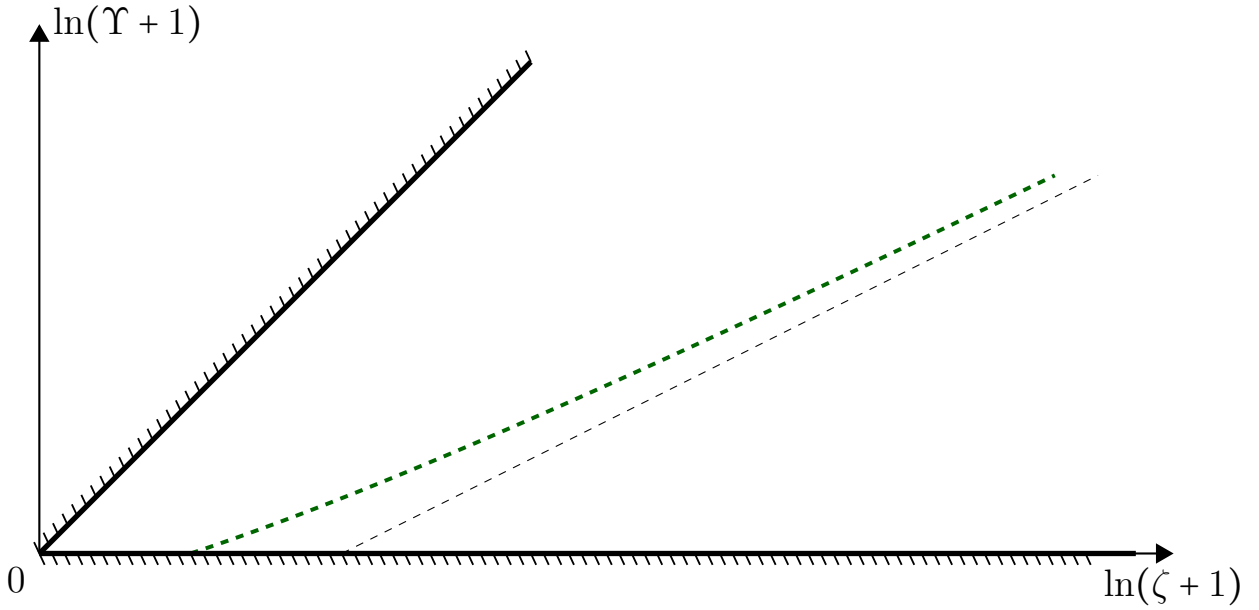


Рисунок 4.3 — Асимптотические области поведения корреляционной функции четвёртого порядка на плоскости переменных ζ - Υ . Время $\ln \text{Pe} < \tau \ll (\ln \text{Pe})^2$.

Теперь оценим второй вклад F_{4-} в (4.133) в области выше чёрной пунктирной линии на Рис. 4.3, при дополнительном условии $\Upsilon \gg 1$. Область насыщения интеграла по q определяется множителем $\cos(q\Upsilon)$, а $K_0 \gg 1$ есть выражение (4.129). Заменяем $\cos(q\Upsilon) \rightarrow \exp(iq\Upsilon)$:

$$F_{4-}(t, \Upsilon, \zeta) = -\frac{e^{-\tau/2}}{8\sqrt{2\pi\tau\zeta}} \text{Re} \int_0^{+\infty} \frac{dq \exp(iq\Upsilon)}{(\sqrt{\pi}/2)(1+q^2)} \exp\left(-\frac{(2a_q - a)^2}{2\tau}\right). \quad (4.137)$$

Повернём контур интегрирования на комплексной плоскости q вблизи нуля вертикально вверх, так что теперь $q = i|q|$. При таком повороте $a_q \rightarrow a_{|q|} - i\pi/2$. Теперь интеграл может быть оценён как

$$F_{4-}(t, \Upsilon, \zeta) = \frac{\ln(\text{Pe}(\Upsilon^2 + 1)\sqrt{\zeta})}{8\sqrt{2\pi\tau^3}} \cdot \frac{1}{\Upsilon\sqrt{\zeta}} \exp\left(-\frac{1}{2\tau} \ln^2 \frac{\text{Pe}(\Upsilon^2 + 1)}{\sqrt{\zeta}} - \frac{\tau}{2}\right). \quad (4.138)$$

Заметим, что если бы не было в подынтегральном выражении фактора, зависящего от ζ_q , то такой путь вычисления интеграла был бы не применим, давая в качестве ответа нуль вместо $\exp(-\Upsilon)$. Множитель, стоящий после знака умножения ‘ $\cdot$ ’ в (4.138), совпадает с ранее полученной зависимостью (4.104) методом поиска оптимальной флуктуации.

Рассмотрим область $\zeta \gg \text{Pe}(\Upsilon^2 + 1)$, которая соответствует длинам $r \gg l^2/r_\kappa$ и $r_\perp \ll r_\kappa$. На Рисунке 4.3 эта область расположена ниже чёрной пунктирной линии. Следует ожидать, что в таком случае корреляционная функция не зависит от

меньшей длины $r_{\perp}$. Приступая к вычислениям, отметим, что в рассматриваемом пределе (4.100) умеренно больших времён верно и неравенство $\tau \ll a^2$, поскольку $a > a_{\kappa}$. Область интегрирования по q ограничивается условиями $K_0 \gtrsim \max(1, \tau/a_q)$ ($F_{4+} \gg F_{4-}$ в разделении (4.133)), что на умеренно больших временах эквивалентно условию $q \lesssim l^2/r_{\kappa} r$. Таким образом, вместо (4.116) приходим к уже сделанной нами другим способом оценке (4.101).

В итоге мы показали, что непосредственное решение уравнения (4.108) на корреляционную функцию привело нас к тем же результатам, которые были нами получены в Пункте 4.4.2 методом поиска оптимальной флуктуации. Продемонстрированное совпадение, с одной стороны, ещё раз подтверждает применимость приближения, основанного на поиске оптимальной флуктуации. В частности, в процессе вычисления ключевого интеграла (4.132) мы установили аналогичный критерий (4.135) для умеренно больших времён, который был нами сформулирован (4.100) как условие относительной малости флуктуаций на фоне оптимальной траектории. Для того, чтобы найти зависимость корреляционной функции от времени на очень больших временах, $\tau \gg a_{\kappa}^2$, в области фиксированного значения длины r , надо решать уравнение (4.108) без каких-либо приближений. Однако основная часть вероятности будет постоянной смещаться в область всё бóльших значений длины $r \sim l e^{\tau}$ и относительно малых поперечных длин $r_{\perp} \ll r$, так что приближение умеренно больших времён будет здесь по-прежнему применимо. С другой стороны, даже после ряда математических упрощений исходного уравнения на F_4 , его решение оказалось достаточно громоздким по сравнению с нахождением F_4 методом поиска оптимальной флуктуации.

4.5 Течение с сильной сдвиговой компонентой

Если в среднем течение предполагается сдвиговым, у матрицы $\hat{\Sigma}$ есть единственный ненулевой элемент $\Sigma_{xy} = \Sigma$, который для определённости мы считаем положительным, $\Sigma > 0$. Тогда уравнение (4.3) принимает вид

$$\partial_t \vartheta + \Sigma y \partial_x \vartheta + \sigma_{ik} r_k \partial_i \vartheta = \kappa \Delta \vartheta + f. \quad (4.139)$$

Среднее по времени $\langle \hat{\sigma} \rangle_\sigma = 0$. В этом Пункте 4.5 мы предполагаем течение двумерным. Как показано в работе [204], наличие третьего z -направления не меняет качественно статистики логарифма главной степени растяжения.

Градиент скорости в общем случае имеет неизотропную статистику. Сила флуктуаций определяется тензором

$$D_{ikjl} = \int \langle \sigma_{ik}(t) \sigma_{jl}(t + t') \rangle dt'. \quad (4.140)$$

Мелкомасштабные флуктуации в геострофических когерентных вихрях, связанные с инерционными волнами, являются сильно анизотропными [73], так что для флуктуирующих частей скорости $\partial_x v_y \ll \partial_y v_x$. Источник анизотропии состоит в том, что мелко-масштабная флуктуация находится в однородном и постоянном по времени сдвиговом течении долгое время, по порядку величины равное $t_* \sim (\Sigma^2 \nu k_f^2)^{-1/3}$, где $1/k_f$ — характерная длина волны. За это время волна перемещается на расстояние $\sim (\Omega/k_f) t_*$, которое должно быть меньше характерного размера вихря R . Приходим к требованию $Ro \cdot R k_f \gg (\Sigma/\nu k_f^2)^{1/3}$. Однако, согласно экспериментальным данным [64], амплитуда мелкомасштабных флуктуаций скорости мала по сравнению с амплитудой крупномасштабных флуктуаций. Для таких турбулентных пульсаций указанное неравенство не выполняется. Поэтому следует ожидать, что статистика этих флуктуаций хотя и обладает анизотропией, но не параметрически сильной, так что все матричные элементы D_{ikjl} имеют один и тот же порядок. В нашем дальнейшем исследовании мы полагаем, что амплитуда флуктуаций относительно мала, так что

$$\frac{D_{ikjl}}{\Sigma} \ll 1. \quad (4.141)$$

4.5.1 Лагранжевы траектории

В этом Пункте мы расширяем общее рассмотрение статистики лагранжевых траекторий Пункта 4.2.1 на частный случай течения с сильной сдвиговой компонентой. Рассмотрим вектор

$$\ell(t) = \begin{pmatrix} \ell \cos \psi, \\ \ell \sin \psi \end{pmatrix}, \quad (4.142)$$

разделяющий две близкие лагранжевы траектории. Его динамика согласно (4.9) описывается уравнением

$$d\ell/dt = (\hat{\Sigma} + \hat{\sigma})\ell. \quad (4.143)$$

Отметим, что вектор ℓ должен нами пониматься как вектор, соединяющий две точки частично усреднённой корреляционной функции $\mathcal{F}$, см. Пункт 4.3, которая не изменяется при инверсии $\ell \rightarrow -\ell$. Таким образом, состояния ψ и $\psi + \pi$ для нас являются физически идентичными. Задача оказывается π -периодической, мы будем подразумевать, что угол ψ принимает значения на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$.

Динамика угла ψ определяется замкнутым уравнением, которое в пределе относительной слабости флуктуаций течения (4.141) имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = -\Sigma \sin^2 \psi + \varsigma, \quad (4.144)$$

где $\varsigma \equiv \sigma_{yx} = \partial_x v_y$. По определению, сила D углового шума ς

$$D = \int dt' \langle \varsigma(t) \varsigma(t+t') \rangle. \quad (4.145)$$

Вне области $|\psi| \lesssim \psi_*$, определяющей значением характерного угла $\psi_* = (D/\Sigma)^{1/3} \ll 1$, влияние случайной компонентой относительно мало, поэтому динамика угла становится детерминированной,

$$\text{ctg } \psi - \text{ctg } \psi_0 = \Sigma(t - t_0), \quad |\sin \psi| \gg \psi_*, \quad (4.146)$$

где индекс ‘0’ соответствует некоторому начальному условию. Угол, сделав проворот на $-\pi$, приходит снова в область $|\psi| \lesssim \psi_*$ [214]. В отсутствии шума направленность ℓ вдоль потока, т.е. состояние $\psi = 0$, не является устойчивым положением. В области $|\psi| \lesssim \psi_*$ в динамике угла ψ оказывается существенным случайный шум ς , который диффузионным образом сдвигает угол в область отрицательных значений $\psi < 0$. Именно компонента σ_{yx} градиента скорости приводит к повороту вектора ℓ , когда он направлен почти вдоль оси Ox , при $|\psi| \ll 1$. Поэтому мы оставили в (4.144) только этот, наиболее существенный вклад ς из $\hat{\sigma}$, тогда как влияние других матричных элементов $\hat{\sigma}$ относительно мало по параметру $D/\Sigma \ll 1$. Провороты происходят со средней частотой

$$\omega = \Sigma \langle \sin^2 \psi \rangle / \pi = \omega_c (D\Sigma^2)^{1/3}, \quad (4.147)$$

где ω_c есть некоторый численный коэффициент, зависящий от деталей статистики шума ς . Динамика угла может быть проанализирована в терминах функции

плотности распределения вероятности (PDF) $\mathcal{P}_\psi(t, \psi)$ с условием нормировки $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \mathcal{P}_\psi = 1$. На больших временах $\omega t \gg 1$ плотность вероятности выходит на стационарное распределение: $\mathcal{P}_\psi(t, \psi) \rightarrow \mathcal{P}_{\text{st}}(\psi)$. Оно имеет максимум при $\psi \sim \psi_*$, ширина пика распределения та же, $\sim \psi_*$. Хвосты функции $\mathcal{P}_{\text{st}} = \omega_c \psi_* / \sin^2 \psi$ при $|\sin \psi| \gg \psi_*$, что соответствует (4.146). Пример стационарной функции распределения изображён на Рисунке 4.4.

Динамика длины вектора $\ell(t)$ описывается уравнением, в котором можно пренебречь вкладом от флуктуаций течения:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\Sigma}{2} \sin(2\psi), \quad (4.148)$$

где $\rho(t) = \ln(\ell(t)/\ell(0))$ есть логарифмическое приращение расстояния между траекториями. Величина дяпуновской экспоненты $\lambda = \langle d\rho/dt \rangle_\sigma$

$$\lambda = \frac{\Sigma}{2} \langle \sin(2\psi) \rangle = \lambda_c (D\Sigma^2)^{1/3}, \quad (4.149)$$

где λ_c есть численная константа, определяющаяся деталями статистики углового шума. Таким образом, частота проворотов ω (4.147) и экспонента Ляпунова (4.149) имеют один и тот же порядок. Пусть в начальный момент времени $\rho_0 = 0$ и $|\psi| \sim 1$. В правой части уравнения (4.148) находится случайный процесс со временем корреляции порядка $(D\Sigma^2)^{-1/3}$. Значит, PDF для ρ принимает асимптотическую форму (4.20) на относительно больших временах $\tau \equiv \tau \gg 1$ [42; 204].

Поскольку частота переворотов ω мала по сравнению с Σ , то разумно в качестве модельной задачи исследовать предел коротко коррелированных флуктуаций $\hat{\sigma}$, $\langle \varsigma(0)\varsigma(t) \rangle = 2D\delta(t)$. В этом пределе возможно подробно исследовать задачу [200] и аналитически найти численные константы $\omega_c \approx 0.201$, $\lambda_c \approx 0.365$. Наше дополнительное аналитическое и численное исследование задачи (см. Приложение Б.3) показало, что $S(\xi) + \xi$ является чётной функцией ξ (эта симметрия есть та же симметрия (4.74)), из чего следует $S'(0) = -1$. Аппроксимация

$$S(\xi) \approx \frac{1}{2}S''(\xi - 1)^2 + \frac{1}{6}S'''(\xi - 1)^3 \quad (4.150)$$

хорошо приближает функцию в круге $|\xi - 1| \leq 1.5$ с $S''' \approx -0.207$ и $S'' = 1 + S'''/2$ (что есть выражение требования $S'(0) = -1$), а также согласуется со скоростью роста среднего квадрата расстояния $\langle \ell^2(t) \rangle$, которая может быть вычислена аналитически [215].

Несмотря на то, что $\rho(t)$ в среднем растёт, его динамика не монотонна. Действительно, в области $|\sin \psi| \gg \psi_*$, где динамика ψ является детерминированной,

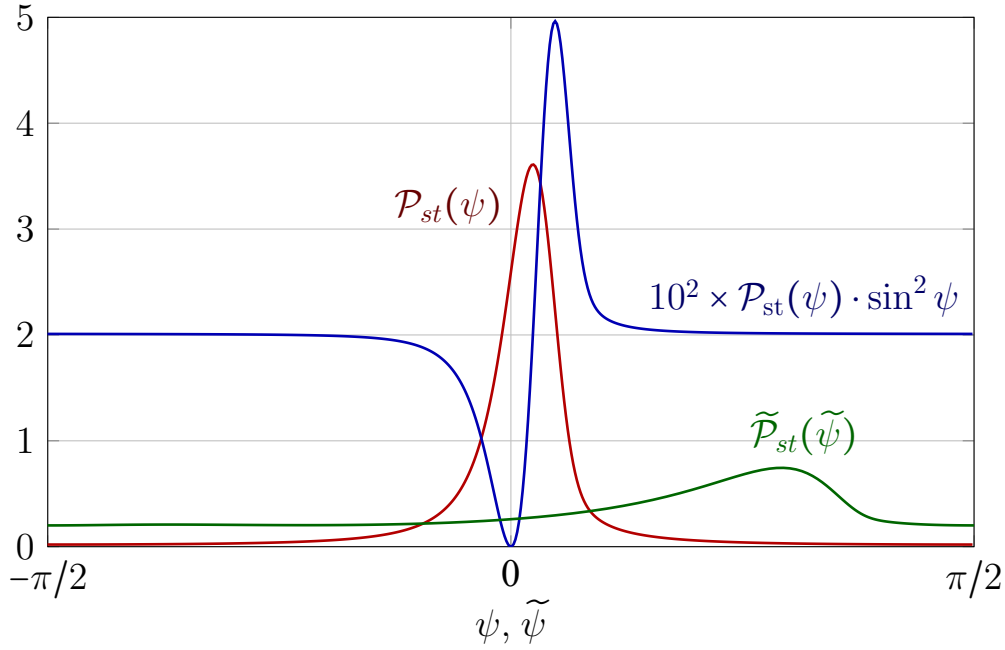


Рисунок 4.4 — Графики стационарных функций распределения угла $\mathcal{P}_{st}(\psi)$ и $\tilde{\mathcal{P}}_{st}(\tilde{\psi})$. Для того, чтобы было видно поведение хвостов функции распределения, была построена также функция $\sin^2 \psi \mathcal{P}_{st}(\psi)$. Было взято значение малого параметра $D/\Sigma = 10^{-3}$.

см. (4.146), можно так же проинтегрировать и (4.148), получив

$$\exp(\varrho_1 - \varrho_2) = \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1}. \quad (4.151)$$

В ходе проворота ϱ достигает локального минимума при $\psi = \pi/2$, а следующий локальный максимум соответствует $|\psi| \sim \psi_*$. Разность между максимумом и минимумом по порядку величины равна $\ln \psi_*^{-1} = (1/3) \ln(\Sigma/D)$.

Удобно перемасштабировать декартовы оси координат так, чтобы в новых координатах в процессе проворота длина вектора если и изменялась, то на фактор порядка единицы. А именно, ось Ox надо сжать, домножив её на фактор ψ_* . После перемасштабировки введём полярные координаты $\tilde{\varrho}, \tilde{\psi}$, так что вектор ℓ (4.142) оказывается равным

$$\ell = \begin{pmatrix} \psi_*^{-1} \exp \tilde{\varrho} \cos \tilde{\psi} \\ \exp \tilde{\varrho} \sin \tilde{\psi} \end{pmatrix} \quad (4.152)$$

Углы $\tilde{\psi}$ и ψ связаны между собой соотношениями

$$\sin \tilde{\psi} = \frac{\sin \psi}{\sqrt{(\psi_* \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi}}, \quad \cos \tilde{\psi} = \frac{\psi_* \cos \psi}{\sqrt{(\psi_* \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi}}. \quad (4.153)$$

Стационарная функция распределения $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}(\tilde{\psi}) = \mathcal{P}_{\text{st}}(\psi) d\psi/d\tilde{\psi}$ хотя и не обладает полной изотропией, но степень её анизотропии умеренна — порядка единицы, в отличие от функции распределения $\mathcal{P}(\psi)$, см. Рисунок 4.4. Преобразование (4.153) оставляет неизменными точки $\pi n/2$, где n — целое число. Это, в частности, означает, что частота проворотов ω (4.147) одна и та же как для ψ , так и для $\tilde{\psi}$. Экспоненты ϱ and $\tilde{\varrho}$ отличаются на функцию, значение которой ограничено во времени,

$$\tilde{\varrho} = \varrho + \frac{1}{2} \ln (\psi_*^2 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi), \quad (4.154)$$

так что функция Крамера (4.20) и экспонента Ляпунова (4.149) совпадают для ϱ и $\tilde{\varrho}$. Можно было бы сразу исследовать динамику вектора ℓ в терминах переменных $\tilde{\varrho}, \tilde{\psi}$, однако аналитические результаты [215] о свойствах стационарной функции распределения по углам $\mathcal{P}_{\text{st}}$ удобно находить именно в терминах угла ψ , поскольку тогда в задаче есть явный малый параметр. Исследование же динамики перемешивания пассивного скаляра удобно производить в терминах как раз $\tilde{\varrho}, \tilde{\psi}$, поскольку динамика $\tilde{\varrho}$ является практически монотонной во времени. Действительно, в области $|\psi| \gg \psi_*$ имеем $\tilde{\varrho} = \varrho + \ln |\sin \psi|$ согласно (4.154), то есть $\tilde{\varrho}$ остаётся постоянным в силу (4.151). Мы вводим обозначение

$$\tilde{r} = \sqrt{\psi_*^2 x^2 + y^2}. \quad (4.155)$$

4.5.2 Перемешивание скаляра

Теперь рассмотрим динамику параметров пространственного распределения в кляксе скаляра. Параметризуем матрицу моментов (4.38) через её главные значения L_+^2, L_-^2 (по определению, $L_+ > L_-$) и угол поворота ψ главной оси:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_+^{-2} & 0 \\ 0 & L_-^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (4.156)$$

Тогда уравнение (4.39) приобретает вид

$$\frac{d \ln L_{\pm}}{dt} = \pm \frac{\Sigma}{2} \sin(2\psi) + \frac{2\kappa}{L_{\pm}^2}, \quad (4.157)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\Sigma \frac{L_+^2 \sin^2 \psi - L_-^2 \cos^2 \psi}{L_+^2 - L_-^2} + \frac{L_-^2}{L_+^2} + \varsigma. \quad (4.158)$$

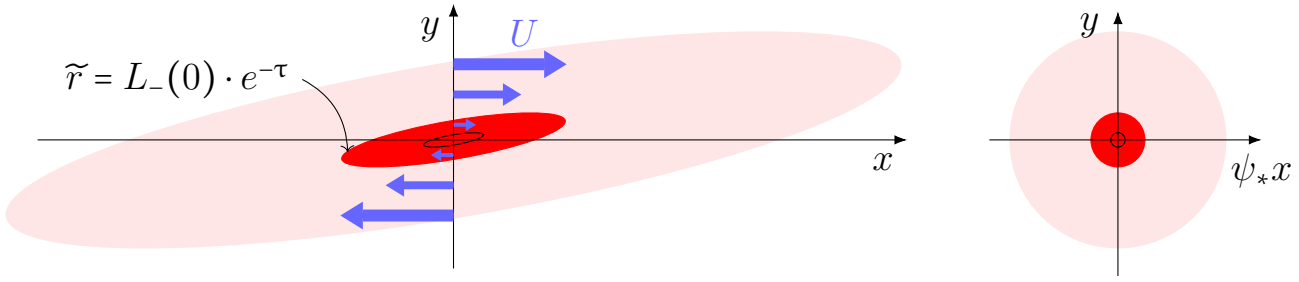


Рисунок 4.5 — Схематическое изображение расположения различных асимптотик пространственно-временной зависимости парной корреляционной функции скаляра F в распадной задаче. Сплошная кривая соответствует $\tilde{r} = r_\kappa$. Ярво-красный соответствует неизменённой амплитуде F , этому соответствует первая асимптотика в (4.76). Осветлённый красный и белый соответствуют сниженной амплитуде F , чему соответствует вторая асимптотика в (4.76). Внутренний фронт двигается вниз по масштабам пока не достигает диффузионного масштаба, $\tilde{r} \sim r_\kappa$. После этого амплитуда F становится всюду сниженной. Левая рисунок соответствует анизотропной задаче (4.139), правый — изотропной, см. Пункт 4.3.1.

Как и при выводе уравнений (4.144, 4.148), были опущены вклады, относительно малые по параметру D/Σ . В пределе существенного растяжения, $L_+ \gg L_-$, уравнение (4.158) динамики угла ψ сводится к уравнению динамики угла наклона вектора ℓ (4.144). Начальными условиями для собственных значений являются $L_+(0) = L_-(0) = l$. Для того, чтобы поведение угла в начальный момент времени не было сингулярным, начальным условием должно быть также $\psi(0) = \pi/4$.

Определим условие на амплитуду флуктуаций поля скорости снизу, при удовлетворении которому в процессе перемешивания случайная компонента скорости оказывается существенной. Противоположный предел несущественных флуктуаций скорости соответствует перемешиванию в постоянном сдвиговом потоке [197]. В отсутствии флуктуаций течения характерное время перемешивания равно $t_{\Sigma\kappa} = (\Sigma^2 \kappa / l^2)^{-1/3}$. Это можно понять из следующего анализа уравнений (4.157, 4.158) для ψ , L_- при $\varsigma = 0$. На начальной стадии, когда, однако, уже $L_+ \gg L_-$, угол ψ удовлетворяет уравнению (4.144), так что $\psi = 1/(\Sigma t)$, а $L_- \sim l/(\Sigma t)$. Это поведение соответствует пренебрежимо малой диффузией и продолжается до $t_{\Sigma\kappa}$, пока второе слагаемое в правой части уравнения (4.157) на L_- не становится существенным. После этого, меньший размер кляксы начинает диффузионным образом расти со временем, $L_- \sim \sqrt{\kappa t}$, так что площадь кляксы $A = L_+ L_-$ также начинает расти со временем по степенному закону, $A \sim l \Sigma \sqrt{\kappa} t^{3/2}$, то есть наступает стадия диффузионного перемешивания. Для того, чтобы флук-

туации скорости были существенными, требуется, чтобы ляпуновская экспонента значительно превышала скорость перемешивания $1/t_{\Sigma\kappa}$ в постоянном сдвиговом потоке, $\tau_{\Sigma\kappa} \gg 1$. В результате приходим к требованию

$$\frac{Dl^2}{\kappa} \gg 1, \quad (4.159)$$

которое мы в дальнейшем предполагаем выполненным. Поскольку в сдвиговом течении экспонента Ляпунова λ (4.149) параметрически отличается от величины флуктуаций D , то сильное неравенство (4.159) отличается от аналогичного неравенства (4.40), которое мы требовали при изучении статистически изотропного течения.

При выполнении неравенства (4.159) всегда можно пренебречь вторым слагаемым в (4.158), так что в пределе $L_+ \gg L_-$ уравнения (4.159) на ψ и (4.157) на $\ln L_+$ совпадают с уравнениями на параметры вектора ℓ — угол ψ (4.144) и логарифмическую степень растяжения ϱ (4.148). Поэтому статистика параметров формы кляксы $\psi, \ln L_+$ обладает теми же свойствами, описанными в Пункте 4.5.1 для параметров ψ, ϱ .

Перейдём теперь к перемасштабированным координатам $\tilde{x} = \psi_* x, y$ (4.152). В этих координатах начальным условием является $\tilde{L}_+(0) = l, \tilde{L}_-(0) = \psi_* l$ и $\tilde{\psi}(0) \approx \pi/2$, последнее равенство согласуется с (4.153) ввиду того, что $\psi(0) = \pi/4$. При наиболее вероятной реализации поля скорости меньший размер кляксы L_- достигнет диффузионный масштаб r_κ (4.40) за время a_κ/λ , где a_κ теперь определяется согласно

$$a_\kappa = \ln \frac{\tilde{L}_-(0)}{r_\kappa} = \ln \frac{l\psi_*}{r_\kappa} = \frac{1}{2} \ln \frac{Dl^2}{\kappa}. \quad (4.160)$$

Мы видим, что здесь стоит логарифм от большого параметра (4.159), который мы считаем также большим, $a_\kappa \gg 1$. Логарифмическая степень растяжения характеризует динамику большего размера кляксы, $\tilde{\varrho} = \tilde{L}_+/l$, что согласуется с (4.154); мы принимаем, что в начальный момент времени $\tilde{\varrho}(0) = 0$.

Производя оценку парной корреляционной функции в координатах $\tilde{x}, y$ статистику вектора ℓ можно считать близкой к изотропной. Поэтому в целом применимо выражение (4.72, 4.73), полученное для полностью изотропной статистики, в котором, однако, следует сделать корректировки. Нижним пределом интегрирования по $\tilde{\xi} = \tilde{\varrho}/\tau$ должно быть $\max(\tilde{\xi}_r, \ln \sqrt{\psi_*})$ с $\tilde{\xi}_r = (\tau)^{-1} \ln(\tilde{r}/l)$ и $\tilde{r}$ определённым в (4.155), поскольку в процессе динамики возможно в том

числе и сокращение степени удлинения кляксы вследствие начального условия $\tilde{L}_-(0)/\tilde{L}_+(0) = \psi_*$. При усреднении по углам следует сравнивать $\tilde{L}_-$ и $\max(\tilde{r}, r_\kappa)$, так что угловой фактор (4.63) становится равным

$$\sim \exp \left(-\chi \left(\tilde{\varrho} - \ln \psi_* + \ln \frac{\max(\tilde{r}, r_\kappa)}{l} \right) \right) = \exp \left(-\tau \cdot \chi(\tilde{\xi} + \tilde{\xi}'_r) \right), \quad (4.161)$$

где $\tilde{\xi}'_r = \max(\tilde{\xi}_r - \ln \psi_*, -a_\kappa)$. Таким образом, получаем

$$F(t, \tilde{r}) \sim \int_{\max(\tilde{\xi}_r, \ln \sqrt{\psi_*})}^{\infty} \frac{\sqrt{S''} \tau d\tilde{\xi}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\tau (S(\tilde{\xi}) + \chi(\tilde{\xi} + \tilde{\xi}'_r)) \right). \quad (4.162)$$

Если в (4.162) положить $\psi_* \rightarrow 1$, то мы придём к уже полученному выражению (4.73) для изотропного начального условия. Результат интегрирования приводит к тем же точкам насыщения (4.75) и результату (4.76), в котором во второй строчке следует выбрать первый вариант записи.

4.5.3 Одноточечные моменты в задаче распада

Перейдём к расчёту одноточечного среднего (4.35). В выражении для моментов (4.35) в изотропном случае надо внести поправку, связанную с анизотропией:

$$\langle |\vartheta|^\alpha \rangle = C_\alpha \psi_*^{\alpha/2} l^\alpha \langle (\tilde{L}_+ \tilde{L}_-)^{-\alpha/2} \rangle_\sigma. \quad (4.163)$$

По аналогии с (4.162) заключаем, что

$$\langle |\vartheta|^\alpha \rangle = C_\alpha \int_{\ln \sqrt{\psi_*}}^{\infty} \frac{\sqrt{S''} \tau d\tilde{\xi}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\tau S(\tilde{\xi}) - \frac{\alpha}{2} (a_\kappa - \tilde{\varrho}) \theta(a_\kappa - \tilde{\varrho}) \right). \quad (4.164)$$

При $\alpha = 2$ среднее (4.164) оказывается средним квадратом, т.е. совпадает с (4.162) для $\tilde{r} \lesssim r_\kappa$.

На начальных временах $\tau < a_\kappa$ интеграл (4.164) определяется вкладом, набирающимся вблизи $\tilde{\varrho} = \tau$, то есть экспоненту в (4.164) можно заменить единицей, получив $\langle |\vartheta|^\alpha \rangle = C_\alpha$. В противоположном пределе больших времен $\tau \rightarrow \infty$ интеграл в (4.164) набирается на $\tilde{\varrho} \geq a_\kappa$, поэтому корреляционная функция является

преобразованием Лапласа плотности распределения (4.20),

$$\begin{aligned} \langle |\vartheta|^\alpha \rangle &\sim e^{\alpha a_\kappa/2} \int_{a_\kappa/\tau}^{+\infty} d\tilde{\xi} \exp(-\tau(S(\tilde{\xi}) + \alpha\tilde{\xi}/2)) \sim \\ &\sim \exp(\alpha a_\kappa/2 - q_\alpha \tau), \end{aligned} \quad (4.165)$$

где преобразование Лежандра функции энтропии $q_\alpha = \alpha\xi_\alpha/2 + S(\xi_\alpha)$ по ξ_α определяется через уравнение $\partial_\xi S(\xi) = -\alpha/2$, которое возникает в ходе интегрирования (4.165) по методу перевала. Заметим, что $0 < \xi_\alpha < 1$, поэтому (4.165) применимо только на больших временах $\tau > a_\kappa/\xi_\alpha$, для которых диффузия важна в динамике скаляра. Следовательно, на промежуточных временах $a_\kappa < \tau < a_\kappa/\xi_\alpha$, одноточечное среднее определяется оптимальной флуктуацией, при которой $\tilde{L}_-(t)$ достигает диффузионный масштаб r_κ как раз к моменту времени t , но диффузия ещё не влияет на динамику, так что по-прежнему $\tilde{L}_+ \tilde{L}_- = \psi_* l^2$. Соберём ответы для всех промежутков времени:

$$\langle |\vartheta|^\alpha \rangle \sim \begin{cases} 1, & \tau < a_\kappa, \\ \exp(-\tau S(-a_\kappa/\tau)), & a_\kappa < \tau < a_\kappa/\xi_\alpha, \\ \exp(\alpha a_\kappa/2 - q_\alpha \tau), & a_\kappa/\xi_\alpha < \tau. \end{cases} \quad (4.166)$$

Оптимальные флуктуации отображены схематически на Рис. 4.6.

Согласно уравнению (4.165), оптимальная флуктуация удовлетворяет неравенству $\xi_\alpha \geq a_\kappa/\tau$. Это влечёт за собой ограничение

$$\alpha < \alpha_{cr} - (2 - S''')a_\kappa/\tau < \alpha_{cr}. \quad (4.167)$$

Второе слагаемое здесь является отрицательной поправкой, записанной в линейном порядке разложения по $a_\kappa/\tau \ll 1$. Равенство $\alpha = \alpha_{cr}$ соответствует $\xi_\alpha = 0$, что даёт критическое значение индекса $\alpha_{cr} = 2$ согласно установленным свойствам функции Крамера S , см. текст в абзаце (4.150). Это же значение критического индекса даёт и изотропная модель, см. (4.74), и, как можно показать [210], остаётся тем же самым для любой модели двумерного течения, являющегося статистически обратимым по времени. Если α превышает порог (4.167), то оптимальная флуктуация на временах $\tau > a_\kappa$ соответствует динамике, в которой диффузия не играет роли, поскольку оптимальное $\varrho^* = a_\kappa$, что соответствует второй асимптотике в (4.166). В случае изотропного случайного течения, аналогичные результаты были получены в работе [43] для предела коротко коррелированных во времени градиентов скорости $\hat{\sigma}$ и в [42] методом поиска оптимальной флуктуации. В

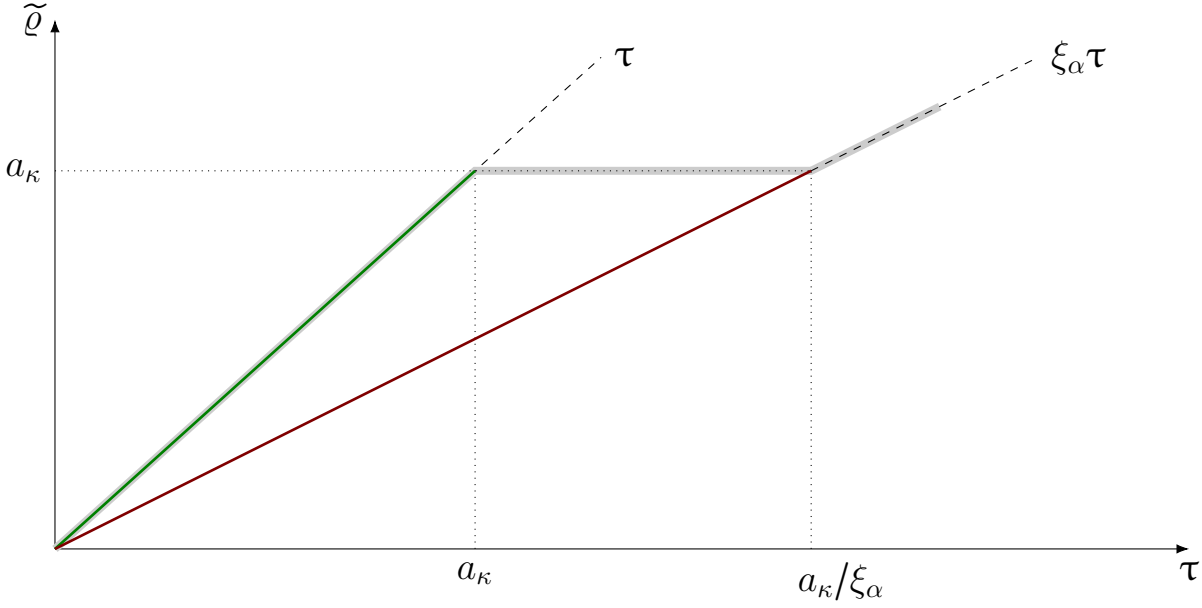


Рисунок 4.6 — Оптимальная флуктуация, формирующая одноточечный момент (4.166), в случае $\alpha < \alpha_{cr}$. Коричневая кривая демонстрирует пример оптимальной флуктуации для первой асимптотики в (4.166), а зелёная кривая — для последней. Толстая серая линия есть конечные точки процесса $\tilde{\varrho}(t)$ при оптимальных флуктуациях течения.

частности, критический индекс $\alpha_{cr} = 2$ такой же, как и установленный нами для случая сильного среднего сдвига.

Посмотрим, как ведёт себя решение (4.166) для среднего квадрата, $\alpha = 2$, на достаточно больших временах $\tau \gg a_\kappa$. Последние две строчки в (4.166) дают один и тот же ответ $\langle \vartheta^2 \rangle \sim (l\psi_*/r_\kappa) \exp(-\tau S(0))$, если во второй строчке использовать разложение $S(\xi) \approx S(0) - \xi$, верное при $\xi \ll 1$. Полученный ответ, как и должно быть, совпадает с ответом для парной корреляционной функции в совпадающих точках, полученный для изотропной статистики скорости, см. текст после (4.76).

Если $-1 < \alpha < 0$, то $q_\alpha < 0$, $\xi_\alpha > 1$, и оптимальная флуктуация соответствует $\varrho = \tau$ при $\tau < a_\kappa/q_\alpha$. Диффузия на этих временах ещё не действует, так что выполняется первый режим в (4.166). После этого, оптимальная флуктуация переходит на линейный рост $\varrho = \xi_\alpha \tau$, и одноточечное среднее начинает расти, так что выполняется третий режим (4.166). Отметим, что моментов с $\alpha < -1$ не существует ввиду предполагающейся гауссовой статистики скаляра до усреднения по реализациям поля скорости.

4.5.4 Постоянная накачка скаляра

В случае постоянной возбуждения скаляра внешним источником f , см. (4.1), его распределение может быть представлено как совокупность клякс, которые были вброшены в систему накачкой в различные моменты времени, после чего каждая эволюционировала в общем для всех них поле скорости. Одноточечная статистика скаляра по-прежнему остаётся гауссовой для фиксированной реализации случайного течения. Сохраним обозначение $\mathcal{F}(t, \mathbf{r})$ для частично усреднённой корреляционной функцией в распадной задаче и определим частично усреднённую парную корреляционную функцию $\mathcal{G} = \langle \vartheta(t, 0) \vartheta(t, \mathbf{r}) \rangle_f$ в задаче с непрерывной накачкой. Для коротко коррелированного во времени источника f имеем связь в статистически стационарном пределе

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dt \mathcal{F}(t, \mathbf{r}). \quad (4.168)$$

Теперь $\langle \vartheta^2 \rangle_f = \mathcal{G}(0)$ в общем выражении (4.35) для одноточечных моментов.

Обозначим за τ_F момент, когда меньший размер кляксы L_- снижается до диффузионного масштаба r_κ в первый раз, т.е. когда $\varrho = a_\kappa$. На временном промежутке $0 < \tau < \tau_F$ частично усреднённое значение $\langle \vartheta^2 \rangle_f = 1$ в распадной задаче, а на больших временах $\tau > \tau_F$ это среднее быстро убывает. Поскольку мы полагаем a_κ большим, то средний квадрат $\langle \vartheta^2 \rangle$ насыщается наиболее вероятными реализациями случайного течения,

$$\langle \vartheta^2 \rangle_{f, \sigma} = \langle \tau_F \rangle_\sigma \approx a_\kappa. \quad (4.169)$$

При произвольном α усреднение по статистике течения означает оптимизацию времени τ_F согласно общему выражению (4.35):

$$\frac{\langle |\vartheta|^\alpha \rangle}{a_\kappa^{\alpha/2}} = C_\alpha \left\langle \left(\frac{\tau_F}{a_\kappa} \right)^{\alpha/2} \right\rangle_\sigma = \frac{C_\alpha}{\sqrt{2\pi a_\kappa / S''}} \int_0^\infty d\tau_F \exp \left(-\tau_F S(a_\kappa / \tau_F) + \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\tau_F}{a_\kappa} \right). \quad (4.170)$$

Если степень достаточно мала, $\alpha \ll a_\kappa$ (считаем производную энтропийной функции в её минимуме $S'' \sim 1$), то при интегрировании достаточно разложить функцию Крамера S в квадратичном порядке у минимума выражения в экспоненте. Статистика скаляра незначительно отличается от гауссовой в этом пределе. В противоположном пределе, при $\alpha \gg a_\kappa$, интегрирование задаётся разложением

функции энтропии в окрестности нуля, так что оптимальное время $\tau_{F*} = \alpha/2S(0)$.
Получаем асимптотики

$$\frac{\langle |\vartheta|^\alpha \rangle}{a_\kappa^{\alpha/2}} \sim \begin{cases} C_\alpha a_\kappa^{\alpha/2} \exp(\alpha^2/8S''a_\kappa), & \alpha \ll a_\kappa, \\ \Gamma(\alpha + 1)E^\alpha \exp\left(-S'_0 a_\kappa \left(1 + \frac{S(0)S''_0}{S'_0} \frac{a_\kappa^2}{\alpha^2} + \dots\right)\right), & \alpha \gg a_\kappa. \end{cases} \quad (4.171)$$

где $E = 1/\sqrt{2S(0)}$, $\Gamma(\alpha + 1)$ есть гамма-функция, а нижний индекс ‘0’ у производных S'_0 , S''_0 , ... соответствует их значению в нуле. Напомним здесь, что для коротко-коррелированной во времени модели флуктуаций течения $S'_0 = -1$, см. (4.150). Во второй строчке (4.171), поправки во внутренней круглой скобке дают в общем случае не малый общий множитель; однако главная зависимость от α содержится в $\Gamma(\alpha + 1)$. С этой точностью можно сказать, что вероятность сильных отклонений определяется экспоненциальным хвостом функции распределения

$$PDF(\vartheta) \sim \exp\left(-\frac{|\vartheta|}{E} - S'_0 a_\kappa\right). \quad (4.172)$$

Отметим, что форма функции распределения на этой асимптотике почти не зависит от величины диффузии, хотя и есть общий множитель, от неё зависящий. Кроссовер от гауссовой формы $PDF(\vartheta) \propto \exp(-\vartheta^2/2a_\kappa)$ к экспоненциальной (4.172) происходит при $\vartheta \sim a_\kappa$. Промежуточная гауссова асимптотика при $\alpha \ll a_\kappa$ была найдена в [216]. Однако, моменты высокого порядка $\alpha \gg a_\kappa$ определяются реализациями случайного течения, которые препятствуют сильному растяжению кляксы. Шум ς в динамике кляксы выполняет роль силы, побуждающей проходить точки $\sin \psi = 0$, тем самым не давая кляксе растягиваться. Представленное рассмотрение для одноточечных средних обобщает рассмотрение [194] для случая статистически изотропного течения на задачу с наличием сильного постоянного сдвига.

4.6 Заключение

Мы рассмотрели процесс перемешивания пассивного скаляра в течении на малых масштабах, где течение достаточно приблизить гладким профилем скорости. Рассматривалось два варианта поля скорости: статистически изотропное

с нулевым средним и имеющее сильную сдвиговую компоненту со слабыми флуктуациями на его фоне. Было показано, что задача с сильной сдвиговой компонентой может быть качественно сведена к задаче с изотропной статистикой путём перемасштабировки одной из декартовой осей координат.

Статистика перемешивания характеризовалась корреляционными функциями скаляра. Любая такая корреляционная функция является результатом усреднения по статистике источника, производящего неоднородности скаляра, и по статистике скорости течения. Статистика источника предполагалась имеющей гауссову одноточечную статистику и гауссов пространственный профиль. Для усреднения корреляционных функций по статистике скорости течения мы использовали несколько подходов, обладающих различной степенью общности: i) Разделение усреднения по углам и по степеням растяжения; этот подход имеет наибольшую общность. ii) Представление функции распределения степеней растяжения в автомодельном виде (4.19, 4.20) с дальнейшим усреднением корреляционной функции скаляра по степеням растяжения, используя метод поиска оптимальной флуктуации — реализации поля скорости, которая даёт наибольший вклад в корреляционную функцию с учётом её вероятности. Этот метод применим, когда все остальные реализации, производящие сравнимый вклад в корреляционную функцию, не сильно отличаются от оптимальной реализации. iii) Использование модели коротко-коррелированного во времени градиента скорости. Эта модель, будучи математически самой простой, далеко не во всём соответствует экспериментально измеренной статистике поля скорости в хаотических потоках.

Сначала нами была рассмотрена парная корреляционная функция $F(t, r)$. Было показано, что её динамика совпадает с динамикой функции распределения $\mathcal{P}(t, \varrho)$ главной степени растяжения ϱ , там что имеет место связь (4.60). После этого тот же ответ для корреляционной функции F был получен методом описки оптимальной флуктуации, а также путём решения уравнения Фоккера-Планка в модели коротко-коррелированного во времени поля скорости. Целью этой части исследования был как сам результат для F , так и демонстрация метода нахождения корреляционной функции путём поиска оптимальной флуктуации. Затем мы изучили корреляционную функцию четвёртого порядка F_4 . Интерес к этой корреляционной функции состоит в том, что она характеризует полосчатость пространственного распределения поля скаляра. Если четыре точки в F_4 разбить на две пары, то при уменьшении угла между двумя векторами, соединяющими

точки внутри этих пар, функция F_4 резко возрастает. Эта угловая особенность свидетельствует о том, что кляксы скаляра, будучи исходно изотропной формы, становятся сильно вытянутыми. В трёх-мерном течении была установлена связь F_4 с совместной функцией распределения степеней деформации элемента жидкости потоком, см. (4.88). Эта связь в двумерном течении отсутствует в силу низкой размерности течения. Вместо этого в двумерном течении нами была вычислена функция F_4 сначала методом поиска оптимальной флуктуации, а затем путём решения соответствующего уравнения Фоккера-Планка. Относительная простота и компактность первого метода и относительная сложность второго свидетельствуют об эффективности первого. В ходе установления общих свойств корреляционной функции F_4 нами было установлено, что для двумерного течения уравнение на неё соответствует уравнению на компоненты матрицы аффинного преобразования $\hat{W}$, накладываемого течением на среду.

Далее нами было рассмотрено перемешивание в двумерном течении с сильной средней сдвиговой компонентой. Динамика лагранжевых траекторий в таком течении характеризуется квази-регулярными переворотами. Мы показали, что соответствующее перемасштабирование одной из координатных осей хотя, разумеется, и не исключает этих переворотов, но делает задачу о статистике скаляра в таком течении качественно подобной задаче о его перемешивании в статистически изотропном поле скорости. Поэтому ответы для найденных нами в присутствии сдвигового течения одноточечных моментов применимы и для изотропного случая. Эти моменты были частично известны до нашего исследования, мы получили выражения для высоких моментов в задаче с непрерывной накачкой. Новизной, однако, является и установленные дополнительные свойства статистики степени растяжения ϱ для сдвигового потока со слабой случайной компонентой, включая симметрию этой статистики, что позволило нам более конкретно установить свойства одноточечных моментов и парной корреляционной функции.

Нами было показано, что путём растяжения (4.152) одной из координатных осей задача качественно сводится к задаче о перемешивании в статистически изотропном хаотическом течении. При этом, однако, следует помнить, что статистика исходного распределения скаляра оказывается также деформирована растяжением. Поэтому следует ожидать, что результаты, полученные нами для корреляционных функций второго, см. уравнение (4.60), и четвёртого, см. Пункт 4.4.2, порядков, применимы и для потока с сильной сдвиговой компонен-

той при должной их адаптации с учётом растяжения начального распределения. Если в рассмотренной задаче с ненулевым Σ восстановить третье z -измерение и также провести соответствующее перемасштабирование по этому направлению, то можно ожидать и применимости результата (4.88) для корреляционной функции четвёртого порядка в трёх-мерном потоке.

В задаче с сильным средним сдвиговым течением $\langle v_x \rangle = \Sigma y$ влияние рассмотренной случайной компоненты скорости v_y имеет принципиально важную роль. Главный вклад в ускорение процесса перемешивания вносит производная вдоль линий тока среднего течения от компоненты скорости v_y , направленной нормально к ним, $\sigma_{yx} = \partial_x v_y$, см. (4.144). В результате совместного действия постоянного сдвига и этой случайной компоненты ляпуновская экспонента потока становится отличной от нуля. Напротив, в [217] был рассмотрен случай, когда случайная компонента есть только в $\partial_z v_x$, где z — третья координата, а $v_y = 0$. В этом случае процесс перемешивания по-прежнему имеет алгебраическую зависимость на больших временах, см. текст перед (4.159). То же замечание касается и других подобных моделей, в одной из которых единственная ненулевая компонента скорости имеет зависимость $v_x(t, y)$ со случайной компонентой во времени и пространстве [218]. Квадрат расстояния между двумя лагранжевыми растёт по алгебраическому закону, то есть ляпуновская экспонента в этой модели равна нулю. Это сравнение показывает обоснованность выбранной нами модели, ухватывающей главный эффект, производимый турбулентными флуктуациями.

Заключение

В работе проведено теоретическое исследование взаимодействия волн в жидкости со средним течением — возбуждение поверхностными волнами приповерхностных вихрей в присутствии поверхностной плёнки и взаимодействие инерционных волн с геострофическим течением, — а также процесса перемешивания пассивного скаляра случайным полем скорости, в том числе с сильной сдвиговой компонентой, в пределе слабой молекулярной диффузии.

Основные **итоги выполненного исследования** работы заключаются в следующем.

1. Рассмотрена генерация приповерхностного вихревого течения поверхностными волнами в слабо-вязкой жидкости в присутствии жидкой эластичной поверхностной плёнки. Получено аналитическое выражение для приповерхностного вихревого течения, вызванного волновым движением. Передача импульса от волн вихревому течению происходит в тонком слое, включающем в себя гребни и впадины волны вместе с вязким подслоем. Механизм возбуждения вихревого течения может быть интерпретирован как результат действия эффективной поверхностной касательной силы — виртуального волнового напряжения. Напряжение пропорционально второй степени амплитуды волны, так что волновой вектор возбуждаемого вихревого течения равен разности волновых векторов двух волн. Пока вихревое течение остаётся слабым и потому ламинарным, процесс его распространения вглубь является диффузионным и происходит за счёт вязкости. Присутствие плёнки увеличивает затухание волны и, тем самым, приводит к увеличению амплитуды виртуального волнового напряжения.
2. Детально проанализирована зависимость виртуального волнового напряжения от амплитуды упругого модуля сжатия плёнки для монохроматического по времени волнового движения. Установлено, что присутствие несжимаемой плёнки на поверхности приводит к увеличению амплитуды вынужденного вихревого эйлера течения в $2^{5/2}/\gamma$ раз ($\gamma = \sqrt{\nu k^2/\omega}$ — малый параметр теории, ω , k — частота и волновое число, ν — вязкость) для неограниченного в горизонтальном направлении водоёма, тогда как добротность волны сокращается в $2^{3/2}/\gamma$ по сравне-

нию с пределом чистой поверхности. По мере снижения модуля упругого растяжения плёнки амплитуда вынужденного вихревого течения ведёт себя немонотонно, достигая сперва максимума, а затем убывая до своего значения для чистой поверхности. Значения амплитуды в максимуме в $\sqrt{2}$ раз больше его значения в пределе несжимаемой плёнки. В этой области параметров амплитуда скорости дрейфа Стокса пренебрежимо мала по сравнению с амплитудой установившейся во времени эйлеровой части массового транспорта. Показано, что пространственная структура в горизонтальной плоскости массового транспорта остаётся неизменной при изменении упругости плёнки, изменяется только его амплитуда и вертикальная зависимость.

3. Рассмотрен интересный с точки зрения экспериментальной реализации случай, когда волновое движение представляет собой две ортогональные бегущие или стоячие волны. Установлена аналитическая зависимость амплитуды вихревого течения от горизонтальной и вертикальной координат, величины модуля упругого сжатия плёнки и времени. То же самое сделано для случая двух распространяющихся под малым углом друг к другу волн. Поскольку в последнем варианте масштаб вихревого течения значительно превышает длину волн, исследован кроме того предел, когда жидкость является глубокой для волн, но должна быть учтена её конечная глубина при описании динамики вихревого течения.
4. Разработан комбинированный метод опосредованного измерения модуля упругого сжатия поверхностной жидкой плёнки, который является основным параметром при описании возбуждения вихревого течения поверхностными волнами. Одновременное измерение линейной скорости затухания волн с учётом трения о стенки бассейна, соотношения амплитуд вертикальной и горизонтальной скоростей в волне и амплитуды возбуждаемого вихревого течения позволили с достаточной точностью определить параметр теории из совокупности экспериментальных данных, тем самым подтвердив применимость теории для описания экспериментальных данных.
5. Произведено исследование взаимодействия инерционной волны с крупномасштабным геострофическим течением. Динамика плоской инерционной волны была исследована в рамках модели, в которой крупномасштабное геострофическое аксиально симметричное течение

локально в пространстве представляется однородным в пространстве и времени сдвиговым течением силы Σ . Установлен механизм, по которому инерционные волны передают свою энергию геострофическому вихревому течению. В пределе малого числа Россби динамика волн с противоположными поляризациями оказывается независимой, для каждой поляризации сохраняется волновое действие. Поэтому запасённая в волне энергия уменьшается с ростом абсолютного значения волнового вектора, который происходит вследствие воздействия на волну сдвигового течения. Благодаря этому механизму инерционные волны формируют касательное напряжение Рейнольдса, которое действует как отрицательная турбулентная диффузия, поддерживающая дифференциальное вращение в вихре. Найден радиальный профиль средней скорости в вихре в отсутствии трения о дно — линейно-логарифмическая зависимость. Показано, что часть энергии, которая выделяется в тепло благодаря действию вязкости в секторе инерционных волн, относительно мала как $\gamma^{1/3}$ ($\gamma = \nu k_f^2 / \Sigma \ll 1$ — малый параметр теории, где k_f есть характерное волновое число).

6. Исследовано влияние конечности чисел Россби и Рейнольдса на структуру циклонов и антициклонов. Численно рассчитано значение радиально-азимутального напряжения Рейнольдса в циклонах и антициклонах. Установлены радиальные профили циклонов и анти-циклонов. Локальная скорость вращения жидкости в циклоне возрастает при приближении к его оси, тогда как в антициклоне она падает. Иными словами, абсолютное значение числа Россби при приближении к оси падает в циклоне и увеличивается в антициклоне. Вследствие этого у циклонов максимум средней азимутальной скорости сдвигается ближе к оси вихря, тогда как антициклонов — дальше от оси вихря по сравнению с пределом малого числа Россби, для которого имеет место линейно-логарифмический профиль. Поскольку для устойчивости вихревого течения требуется, чтобы абсолютное значения числа Россби не превышало определённый порог, то указанная особенность антициклонов приводит к ограничению их максимально возможного размера.
7. Мы исследовали роль границ, ортогональных оси вращения, в формировании радиального профиля когерентного вихря. Установлено, что выше масштаба, на котором сравнивается действие объёмной вязкости и эф-

фективного трения о дно, доминирует трение о дно, которое изменяет линейно-логарифмический профиль на профиль с постоянным значением азимутальной скорости. Кроме того, мы установили, что трение о дно может снижать эффективность передачи энергии когерентному течению от турбулентных пульсаций только в случае, если эти пульсации являются мелко-масштабным геострофическим течением.

8. Мы исследовали задачу о распространении инерционной волны на фоне геострофического течения в пространственно-неоднородной постановке задачи: было предположено, что пакет сходящихся цилиндрических волн распространяется в аксиально-симметричном вихре. Была рассмотрена волна с фиксированными сохраняющимися волновыми числами, имеющая заданное волновое число на его периферии. Было установлено, что, если волна переносит момент количества движения, по знаку совпадающий со направлением вращения вихря, то по мере распространения пакета вглубь вихря волновой вектор пакета приобретает всё бóльшую радиальную компоненту, которая при достаточной интенсивности вихря обращается в бесконечность. В результате частота инерционной волны в системе отсчёта, связанной с элементом её содержащей жидкости, падает со временем. Регуляризация этого процесса происходит за счёт действия вязкости, что приводит к поглощению волны. Показано, что для того, чтобы инерционная волна могла быть поглощена геострофическим течением, и произошла передача момента импульса и энергии волны геострофическому течению, требуется, чтобы характерная разность скоростей в разных областях вихря превосходила групповую скорость волны на его периферии. Этот качественный критерий был подтверждён экспериментальными данными. Если же волна переносит угловой момент противоположного знака, то происходит её отражение, так что передача момента импульса от волны геострофическому течению отсутствует. Указана аналогия между поглощением инерционной волны геострофическим течением и поглощением внутренней волны горизонтальным течением с вертикальным сдвигом в стратифицированной жидкости.
9. Рассмотрены малые по амплитуде аксиально-симметричные возбуждения в аксиально-симметричном когерентном вихре, называемые зональными течениями. Было предположено, что источником поддержа-

ния когерентного течения является геострофическое мелко-масштабное течение. В конденсате, насыщение которого достигнуто за счёт трения о дно, в высокочастотной области возбуждения представляют собой волны с линейным законом дисперсии, скорость оценивается как $v_g \sim r_\perp \sqrt{\alpha \nu k_f^2}$, а длина пробега велика по сравнению с длиной волны ($r_\perp$ — расстояние до оси вихря, α — коэффициент трения о дно, $1/k_f$ — характерный масштаб турбулентных пульсаций). В вязком конденсате закон дисперсии совпадает с законом дисперсии волн в вязком нестационарном слое, так что волны являются нераспространяющимися.

10. Рассмотрена задача о перемешивании скалярного поля хаотическим потоком на масштабах меньше, чем корреляционная длина градиента поля скорости, так что локально поток достаточно приблизить линейным в пространстве профилем, в условиях слабой молекулярной диффузии. Поток предполагался случайным во времени с изотропной статистикой. Было показано, что пространственная зависимость парной корреляционной функции скаляра в распадной задаче на больших временах описывает распределение расстояния между двумя близкими лагранжевыми траекториями при их фиксированном расстоянии в начальный момент времени.
11. Для описанной в предыдущем пункте постановки задачи о перемешивании скаляра установлена связь между корреляционной функцией четвёртого порядка и статистическими свойствами потока. Показано, что в трёх-мерном случае пространственная зависимость этой корреляционной функции описывает совместную функцию распределения двух степеней растяжения элементарного объёма жидкости. В частности, поведение корреляционной функции на угловых особенностях соответствует статистике второй степени растяжения при фиксированном значении главной степени растяжения. В двумерном случае в несжимаемом потоке есть только одна независимая степень растяжения элементарного объёма жидкости. Вследствие этого связь между корреляционной функцией четвёртого порядка оказывается менее универсальной. Нами установлена форма угловой зависимости в модели коротко-коррелированной во времени статистике потока. На расстояниях $r \ll l^2/r_\kappa$ (l — исходная корреляционная длина распределения скаляра в пространстве, r_κ — диффузионный масштаб) форма угловой особен-

ности определяется начальными условиями распределения скаляра, но бóльших расстояниях эта зависимость пропадает.

12. Рассмотрена задача о перемешивании скалярного поля в случайном гладком двумерном течении с сильной средней сдвиговой компонентой. Установлена статистика моментов пассивного скаляра для распаднóй задачи. Статистика выражена через преобразование Лежандра от функции Крамера, описывающей статистику деформации малого элемента жидкости на бóльших временах. Установлены свойства функции Крамера для модельной задачи с коротко-коррелированным по времени полем скорости. Для задачи с непрерывным возбуждением флуктуаций пассивного скаляра установлено, что хвост функции распределения, описывающий высокие моменты, является экспоненциальным, тогда как тело функции распределения близкó к нормальному распределению. Нами было показано, что путём перемасштабирования одной из координатных осей задача с определёнными говорками качественно сводится к задаче о перемешивании в статистически изотропном хаотическом течении. Поэтому следует ожидать, что результаты, полученные нами для корреляционных функций второго и четвёртого порядков, применимы при правильной их адаптации и для потока с сильной сдвиговой компонентой.

Как следует из приведённого списка результатов, данное теоретическое исследование проводилось в тесном контакте с экспериментальными исследованиями, благодаря чему ряд теоретических результатов, касающихся i) возбуждения приповерхностного вихревого течения поверхностными волнами в присутствии плёнки и ii) поглощения инерционных волн геострофическим течением, получил экспериментальные подтверждения. Это удостоверяет адекватность построенных физических картин исследуемых явлений.

Из этого следуют **рекомендации** по использованию полученных в диссертации результатов: построенные теоретические модели могут быть использованы для анализа и интерпретации данных, полученных i) в экспериментах по возбуждению вихревых течений поверхностными волнами на поверхности воды, у которой поверхность практически никогда не бывает чистой; ii) путём численного моделирования или натурных экспериментов с турбулентным течением быстро вращающейся жидкости в режиме, когда наблюдаются долгоживущие крупномасштабные геострофические вихри; iii) путём численного моделирования или

натурных экспериментов по перемешиванию пассивно переносимых турбулентными потоками скалярных полей, характеризующихся большим числом Шмидта.

Перспективами дальнейшей разработки темы является приложение построенной теории поглощения инерционных волн геострофическим течением к более сложным течениям, в которых присутствует быстрое вращение. Такие течения, например, устанавливаются в результате тепловой конвекции, примерами чему являются торнадо и атмосферные тропические циклоны. Результатом данной диссертации, полезным для анализа таких течений, является утверждение, что инерционные волны, существующие в качестве возбуждений в любом вращающемся течении, подвергаются разделению аксиально-симметричным вихревым течением по знаку переносимого ими момента количества движения. В результате напряжение Рейнольдса, формируемое ансамблем инерционных волн, может принимать знак, соответствующий поддержанию вихревого течения. При численном моделировании таких течений это означает, что замыкание турбулентности на малых масштабах, которое используется при моделировании крупномасштабных вихрей (*large-eddy simulation*), требует дополнительной настройки, учитывающей поведение инерционных волн.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность Лебедеву В. В. за плодотворное обсуждение результатов. Также автор благодарит Жуховицкого Д. И. и Зуева А. Л. за ценные замечания при подготовке текста диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

- A1. *Parfenyev, V.M.* Effects of thin film and Stokes drift on the generation of vorticity by surface waves [Text] / V.M. Parfenyev, S.S. Vergeles, V.V. Lebedev // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 94, no. 5. — P. 052801.
- A2. *Parfenyev, V.M.* Influence of a thin compressible insoluble liquid film on the eddy currents generated by interacting surface waves [Text] / V.M. Parfenyev, S.S. Vergeles // *Physical Review Fluids*. — 2018. — Vol. 3, no. 6. — P. 064702.
- A3. *Parfenyev, V.M.* Formation and decay of eddy currents generated by crossed surface waves [Text] / V.M. Parfenyev, S.V. Filatov, M.Y. Brazhnikov, S.S. Vergeles, A.A. Levchenko // *Physical Review Fluids*. — 2019. — Vol. 4, no. 11. — P. 114701.
- A4. *Parfenyev, V.M.* Large-scale vertical vorticity generated by two crossing surface waves [Text] / V.M. Parfenyev, S.S. Vergeles // *Physical Review Fluids*. — 2020. — Vol. 5, no. 9. — P. 094702.
- A5. *Kolokolov, I.V.* Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow [Text] / I.V. Kolokolov, L.L. Ogorodnikov, S.S. Vergeles // *Physical Review Fluids*. — 2020. — Vol. 5, no. 3. — P. 034604.
- A6. *Parfenyev, V.M.* Velocity profiles of cyclones and anticyclones in a rotating turbulent flow [Text] / V.M. Parfenyev, I.A. Vointsev, A.O. Skoba, S.S. Vergeles. // *Physics of Fluids*. — 2021. — Vol. 33, no. 6. — P. 065117.
- A7. *Parfenyev, V.M.* Influence of Ekman friction on the velocity profile of a coherent vortex in a three-dimensional rotating turbulent flow [Text] / V.M. Parfenyev, S.S. Vergeles // *Physics of Fluids*. — 2021. — Vol. 33, no. 11. — P. 115128.
- A8. *Ogorodnikov, L.L.* Structure function of velocity in a geostrophic vortex under strong rotation [Text] / L.L. Ogorodnikov, S.S. Vergeles // *Physics of Fluids*. — 2022. — Vol. 34, no. 12. — P. 125111.
- A9. *Ivchenko, N.A.* Waves in a coherent two-dimensional flow [Text] / N.A. Ivchenko, S.S. Vergeles // *Physics of Fluids*. — 2021. — Vol. 33, no. 10. — P. 105102.
- A10. *Tumachev, D.D.* Two Dynamical Regimes of Coherent Columnar Vortices in a Rotating Fluid [Text] / D.D. Tumachev, S.V. Filatov, S.S. Vergeles, A.A. Levchenko // *JETP Letters*. — 2023. — Vol. 118, no. 6. — P. 426—432.
- A11. *Vergeles, S.* Spatial dependence of correlation functions in the decay problem for a passive scalar in a large-scale velocity field [Text] / S. Vergeles // *Journal of*

Experimental and Theoretical Physics. — 2006. — Vol. 102, no. 4. — P. 685—701.

- A12. *Ivchenko, N.A.* Statistics of a Passive Scalar in a 2D Shear Flow with Fluctuations [Text] / N.A. Ivchenko, S.S. Vergeles // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2023. — Vol. 136, no. 5. — P. 644—652.
- A13. *Вергелес, С.С.* Корреляционные функции пассивного скаляра как мера статистики градиента скорости [Текст] / С.С. Вергелес // Письма в ЖЭТФ. — 2024. — Т. 120, вып. 4. — С. 288—295.

Список литературы

1. *Prandtl, L.* Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz [Text] / L. Prandtl // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1925. — Vol. 5, no. 2. — P. 136—139.
2. *Ландау, Л.* Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика [Текст] / Л. Ландау, Е. Лифшиц. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 736 с.
3. *Luchini, P.* Universality of the turbulent velocity profile [Text] / P. Luchini // Physical Review Letters. — 2017. — Vol. 118, no. 22. — P. 224501.
4. *Lord Rayleigh.* On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems [Text] / Lord Rayleigh // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1884. — Vol. 175. — P. 1—21.
5. *Westervelt, P. J.* The theory of steady rotational flow generated by a sound field [Text] / P. J. Westervelt // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1953. — Vol. 25, no. 1. — P. 60—67.
6. *Boluriaan, S.* Acoustic streaming: from Rayleigh to today [Text] / S. Boluriaan, P. J. Morris // International Journal of aeroacoustics. — 2003. — Vol. 2, no. 3. — P. 255—292.
7. *Longuet-Higgins, M. S.* Mass transport in water waves [Text] / M. S. Longuet-Higgins // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 1953. — Vol. 245, no. 903. — P. 535—581.
8. *Ламб, Г.* Гидродинамика [Текст] / Г. Ламб. — Москва, Ленинград : ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. — 929 с.
9. *Longuet-Higgins, M. S.* Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to 'surf beats' [Text] / M. S. Longuet-Higgins, R. W. Stewart // Journal of Fluid Mechanics. — 1962. — Vol. 13, no. 4. — P. 481—504.
10. *Craik, A. D. D.* A rational model for Langmuir circulations [Text] / A. D. D. Craik, S. Leibovich // Journal of Fluid Mechanics. — 1976. — Vol. 73, no. 3. — P. 401—426.

11. *Leibovich, S.* On the evolution of the system of wind drift currents and Langmuir circulations in the ocean. Part 1. Theory and averaged current [Text] / S. Leibovich // Journal of Fluid Mechanics. — 1977. — Vol. 79, no. 4. — P. 715—743.
12. *Vergeles, S. S.* Role of wave scattering in instability-induced Langmuir circulation [Text] / S. S. Vergeles, I. A. Vointsev // Physics of Fluids. — 2024. — Vol. 36, no. 3. — P. 034119.
13. *Henderson, D. M.* Effects of surfactants on Faraday-wave dynamics [Text] / D. M. Henderson // Journal of Fluid Mechanics. — 1998. — Vol. 365. — P. 89—107.
14. *Левич, В. Г.* Физико-химическая гидродинамика [Текст] / В. Г. Левич. — Издание 3-е, исправленное и дополненное. — М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. — 708 с.
15. *Miles, J. W.* Surface-wave damping in closed basins [Text] / J. W. Miles // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1967. — Vol. 297, no. 1451. — P. 459—475.
16. *Henderson, D. M.* The role of dissipation in the evolution of ocean swell [Text] / D. M. Henderson, H. Segur // Journal of Geophysical Research: Oceans. — 2013. — Vol. 118, no. 10. — P. 5074—5091.
17. *Kraichnan, R. H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence [Text] / R. H. Kraichnan // The Physics of Fluids. — 1967. — Vol. 10, no. 7. — P. 1417—1423.
18. *Boffetta, G.* Two-dimensional turbulence [Text] / G. Boffetta, R. E. Ecke // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2012. — Vol. 44. — P. 427—451.
19. *Колоколов, И. В.* Двумерная турбулентность в ограниченной ячейке [Текст] / И. В. Колоколов, В. В. Лебедев // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 2024. — Т. 166, вып. 1. — С. 110—120.
20. *Старр, В. П.* Физика явлений с отрицательной вязкостью [Текст] / В. П. Старр ; под ред. А. Монин. — Москва : Мир, 1971. — 261 с.
21. *Kolokolov, I.* Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box [Text] / I. Kolokolov, V. Lebedev // Physical Review E. — 2016. — Vol. 93, no. 3. — P. 033104.

22. *Sommeria, J.* Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box [Text] / J. Sommeria // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1986. — Vol. 170. — P. 139—168.
23. *Xia, H.* Spectrally condensed turbulence in thin layers [Text] / H. Xia, M. Shats, G. Falkovich // *Physics of Fluids*. — 2009. — Vol. 21, no. 12. — P. 125101.
24. *Orlov, A.* Large-Scale Coherent Vortex Formation in Two-Dimensional Turbulence [Text] / A. Orlov, M. Brazhnikov, A. Levchenko // *JETP Letters*. — 2018. — Vol. 107, no. 3. — P. 157—162.
25. Dynamics of energy condensation in two-dimensional turbulence [Text] / M. Chertkov [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2007. — Vol. 99, no. 8. — P. 084501.
26. Universal profile of the vortex condensate in two-dimensional turbulence [Text] / J. Laurie [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2014. — Vol. 113, no. 25. — P. 254503.
27. *Tabeling, P.* Two-dimensional turbulence: a physicist approach [Text] / P. Tabeling // *Physics reports*. — 2002. — Vol. 362, no. 1. — P. 1—62.
28. *Clercx, H.* Two-dimensional Navier–Stokes turbulence in bounded domains [Text] / H. Clercx, G. van Heijst // *Applied Mechanics Reviews*. — 2009. — Vol. 62. — P. 020802.
29. *Proudman, J.* On the motion of solids in a liquid possessing vorticity [Text] / J. Proudman // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. — 1916. — Vol. 92, no. 642. — P. 408—424.
30. *Taylor, G. I.* Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational [Text] / G. I. Taylor // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. — 1917. — Vol. 93, no. 648. — P. 99—113.
31. *Davidson, P. A.* Turbulence: an introduction for scientists and engineers [Text] / P. A. Davidson. — 2nd. — Oxford : Oxford University Press, 2015. — 646 p.
32. *Гринспен, Х.* Теория вращающихся жидкостей [Текст] / Х. Гринспен. — Ленинград : Гидрометеиздат, 1975. — 304 с.
33. *McEwan, A.* Angular momentum diffusion and the initiation of cyclones [Text] / A. McEwan // *Nature*. — 1976. — Vol. 260, no. 5547. — P. 126—128.

34. *Godeferd, F. S.* Structure and dynamics of rotating turbulence: a review of recent experimental and numerical results [Text] / F. S. Godeferd, F. Moisy // *Applied Mechanics Reviews*. — 2015. — Vol. 67, no. 3. — P. 030802.
35. Coherent structures and extreme events in rotating multiphase turbulent flows [Text] / L. Biferale [et al.] // *Physical Review X*. — 2016. — Vol. 6, no. 4. — P. 041036.
36. Interplay between geostrophic vortices and inertial waves in precession-driven turbulence [Text] / F. Pizzi [et al.] // *Physics of Fluids*. — 2022. — Vol. 34, no. 12. — P. 125135.
37. *Филлипс, О.* Динамика верхнего слоя океана [Текст] / О. Филлипс. — Второе издание, исправленное и дополненное. — Ленинград : Гидрометеиздат, 1980. — 319 с.
38. *Жмур, В.* Мезомасштабные вихри океана [Текст] / В. Жмур. — Москва : ГЕОС, 2011. — 290 с.
39. *Booker, J. R.* The critical layer for internal gravity waves in a shear flow [Text] / J. R. Booker, F. P. Bretherton // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1967. — Vol. 27, no. 3. — P. 513—539.
40. The lifecycle of topographically-generated internal waves [Text] / R. Musgrave [et al.] // *Ocean mixing. Drivers, Mechanisms and Impacts.* / ed. by M. Meredith, A. N. Garabato. — Amsterdam : Elsevier, 2022. — Chap. 6. P. 117—144.
41. *Hunt, J. C.* Rapid distortion theory and the ‘problems’ of turbulence [Text] / J. C. Hunt, D. J. Carruthers // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1990. — Vol. 212. — P. 497—532.
42. *Balkovsky, E.* Universal long-time properties of Lagrangian statistics in the Batchelor regime and their application to the passive scalar problem [Text] / E. Balkovsky, A. Fouxon // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 60, no. 4. — P. 4164.
43. *Son, D.* Turbulent decay of a passive scalar in the Batchelor limit: Exact results from a quantum-mechanical approach [Text] / D. Son // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 59, no. 4. — R3811.
44. *Falkovich, G.* Particles and fields in fluid turbulence [Text] / G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola // *Reviews of modern Physics*. — 2001. — Vol. 73, no. 4. — P. 913.

45. *Salhi, A.* Advances in rapid distortion theory: From rotating shear flows to the baroclinic instability [Text] / A. Salhi, C. Cambon // Journal of Applied Mechanics. — 2006. — Vol. 73. — P. 449—460.
46. Small-scale turbulent dynamo [Text] / M. Chertkov [et al.] // Physical Review Letters. — 1999. — Vol. 83, no. 20. — P. 4065.
47. *Kogan, V.* Kinematic magnetic dynamo in a random flow with strong average shear [Text] / V. Kogan, I. Kolokolov, V. Lebedev // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2010. — Vol. 43, no. 18. — P. 182001.
48. *Nicolás, J. A.* Three-dimensional streaming flows driven by oscillatory boundary layers [Text] / J. A. Nicolás, J. M. Vega // Fluid Dynamics Research. — 2003. — Vol. 32, no. 4. — P. 119—139.
49. Nonlinear generation of vorticity by surface waves [Text] / S. V. Filatov [et al.] // Physical Review Letters. — 2016. — Vol. 116, no. 5. — P. 054501.
50. *Lucassen-Reynders, E. H.* Properties of capillary waves [Text] / E. H. Lucassen-Reynders, J. Lucassen // Advances in Colloid and Interface Science. — 1970. — Vol. 2, no. 4. — P. 347—395.
51. Scale-dependent cyclone-anticyclone asymmetry in a forced rotating turbulence experiment [Text] / B. Gallet [et al.] // Physics of Fluids. — 2014. — Vol. 26, no. 3. — P. 035108.
52. *Bartello, P.* Coherent structures in rotating three-dimensional turbulence [Text] / P. Bartello, O. Métais, M. Lesieur // Journal of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 273. — P. 1—29.
53. *Fereday, D. R.* Scalar decay in two-dimensional chaotic advection and Batchelor-regime turbulence [Text] / D. R. Fereday, P. H. Haynes // Physics of Fluids. — 2004. — Vol. 16, no. 12. — P. 4359—4370.
54. *Sukhatme, J.* Decay of passive scalars under the action of single scale smooth velocity fields in bounded two-dimensional domains: From non-self-similar probability distribution functions to self-similar eigenmodes [Text] / J. Sukhatme, R. T. Pierrehumbert // Physical Review E. — 2002. — Vol. 66, no. 5. — P. 056302.
55. *Duplat, J.* A nonsequential turbulent mixing process [Text] / J. Duplat, C. Innocenti, E. Villiermaux // Physics of Fluids. — 2010. — Vol. 22, no. 3. — P. 035104.

56. Shear effects on passive scalar spectra [Text] / A. Celani [et al.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2005. — Vol. 523. — P. 99—108.
57. *Parfenyev, V.* Effects of thin film and Stokes drift on the generation of vorticity by surface waves [Text] / V. Parfenyev, S. Vergeles, V. Lebedev // Physical Review E. — 2016. — Vol. 94, no. 5. — P. 052801.
58. *Parfenyev, V. M.* Influence of a thin compressible insoluble liquid film on the eddy currents generated by interacting surface waves [Text] / V. M. Parfenyev, S. S. Vergeles // Physical Review Fluids. — 2018. — Vol. 3, no. 6. — P. 064702.
59. Formation and decay of eddy currents generated by crossed surface waves [Text] / V. M. Parfenyev [et al.] // Physical Review Fluids. — 2019. — Vol. 4, no. 11. — P. 114701.
60. *Parfenyev, V. M.* Large-scale vertical vorticity generated by two crossing surface waves [Text] / V. M. Parfenyev, S. S. Vergeles // Physical Review Fluids. — 2020. — Vol. 5, no. 9. — P. 094702.
61. Generation of stripe-like vortex flow by noncollinear waves on the water surface [Text] / S. Filatov [et al.] // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2022. — Vol. 434. — P. 133218.
62. *Kolokolov, I. V.* Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow [Text] / I. V. Kolokolov, L. L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles // Physical Review Fluids. — 2020. — Vol. 5, no. 3. — P. 034604.
63. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction [Text] / A. Doludenko [et al.] // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, no. 1. — P. 011704.
64. Two Dynamical Regimes of Coherent Columnar Vortices in a Rotating Fluid [Text] / D. D. Tumachev [et al.] // JETP Letters. — 2023. — Vol. 118, no. 6. — P. 426—432.
65. Velocity profiles of cyclones and anticyclones in a rotating turbulent flow [Text] / V. M. Parfenyev [et al.] // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, no. 6. — P. 065117.
66. *Parfenyev, V. M.* Influence of Ekman friction on the velocity profile of a coherent vortex in a three-dimensional rotating turbulent flow [Text] / V. M. Parfenyev, S. S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, no. 11. — P. 115128.

67. *Vergeles, S. S.* Spatial dependence of correlation functions in the decay problem for a passive scalar in a large-scale velocity field [Text] / S. S. Vergeles // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2006. — Vol. 102, no. 4. — P. 685—701.
68. *Вергелес, С. С.* Корреляционные функции пассивного скаляра как мера статистики градиента скорости [Текст] / С. С. Вергелес // Письма в ЖЭТФ. — 2024. — Т. 120, вып. 4. — С. 288—295.
69. *Ivchenko, N. A.* Statistics of a Passive Scalar in a 2D Shear Flow with Fluctuations [Text] / N. A. Ivchenko, S. S. Vergeles // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2023. — Vol. 136, no. 5. — P. 644—652.
70. Chaotic flow and efficient mixing in a microchannel with a polymer solution [Text] / T. Burghlea [et al.] // Physical Review E. — 2004. — Vol. 69, no. 6. — P. 066305.
71. *Steinberg, V.* Elastic Turbulence: An Experimental View on Inertialess Random Flow [Text] / V. Steinberg // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2021. — Vol. 53. — P. 27—58.
72. *Falkovich, G.* Turbulence appearance and nonappearance in thin fluid layers [Text] / G. Falkovich, N. Vladimirova // Physical Review Letters. — 2018. — Vol. 121, no. 16. — P. 164501.
73. *Ogorodnikov, L. L.* Structure function of velocity in a geostrophic vortex under strong rotation [Text] / L. L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2022. — Vol. 34, no. 12. — P. 125111.
74. *Stokes, G. G.* On the theory of oscillatory waves [Text] / G. G. Stokes // Trans. Cambridge Philos. Soc. — 1847. — Vol. 8. — P. 441—473.
75. *Weber, J. E.* Virtual wave stress and mean drift in spatially damped surface waves [Text] / J. E. Weber // Journal of Geophysical Research: Oceans. — 2001. — Vol. 106, no. C6. — P. 11653—11657.
76. *Longuet-Higgins, M. S.* A nonlinear mechanism for the generation of sea waves [Text] / M. S. Longuet-Higgins // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1969. — Vol. 311, no. 1506. — P. 371—389.
77. *Stuart, J. T.* Double boundary layers in oscillatory viscous flow [Text] / J. T. Stuart // Journal of Fluid Mechanics. — 1966. — Vol. 24, no. 4. — P. 673—687.

78. *Unluata, U.* Mass transport in water waves [Text] / U. Unluata, C. C. Mei // Journal of Geophysical Research. — 1970. — Vol. 75, no. 36. — P. 7611—7618.
79. *Dore, B. D.* On mass transport velocity due to progressive waves [Text] / B. D. Dore // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1977. — Vol. 30, no. 2. — P. 157—173.
80. *Madsen, O. S.* Mass transport in deep-water waves [Text] / O. S. Madsen // Journal of Physical Oceanography. — 1978. — Vol. 8, no. 6. — P. 1009—1015.
81. *Weber, J. E.* Attenuated wave-induced drift in a viscous rotating ocean [Text] / J. E. Weber // Journal of Fluid Mechanics. — 1983. — Vol. 137. — P. 115—129.
82. *Xu, Z.* Wave-and wind-driven flow in water of finite depth [Text] / Z. Xu, A. J. Bowen // Journal of Physical Oceanography. — 1994. — Vol. 24, no. 9. — P. 1850—1866.
83. Reconciling different formulations of viscous water waves and their mass conservation [Text] / D. Eeltink [et al.] // Wave Motion. — 2020. — P. 102610.
84. Generation of vortices by gravity waves on a water surface [Text] / S. V. Filatov [et al.] // JETP Letters. — 2016. — Vol. 104, no. 10. — P. 702—708.
85. Wave-based liquid-interface metamaterials [Text] / N. Francois [et al.] // Nature Communications. — 2017. — Vol. 8, no. 1. — P. 1—9.
86. Generation of vortex lattices at the liquid–gas interface using rotating surface waves [Text] / H. Xia [et al.] // Fluids. — 2019. — Vol. 4, no. 2. — P. 74.
87. *Abella, A. P.* Spatio-Temporal Analysis of Surface Waves Generating Octupole Vortices in a Square Domain [Text] / A. P. Abella, M. N. Soriano // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2020. — Vol. 130. — P. 452—462.
88. Double cascade turbulence and Richardson dispersion in a horizontal fluid flow induced by Faraday waves [Text] / A. Von Kameke [et al.] // Physical Review Letters. — 2011. — Vol. 107, no. 7. — P. 074502.
89. Inverse energy cascade and emergence of large coherent vortices in turbulence driven by Faraday waves [Text] / N. Francois [et al.] // Physical Review Letters. — 2013. — Vol. 110, no. 19. — P. 194501.
90. Three-dimensional fluid motion in Faraday waves: creation of vorticity and generation of two-dimensional turbulence [Text] / N. Francois [et al.] // Physical Review X. — 2014. — Vol. 4, no. 2. — P. 021021.

91. *Van Dorn, W.* Boundary dissipation of oscillatory waves [Text] / W. Van Dorn // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1966. — Vol. 24, no. 4. — P. 769—779.
92. Impact of dissipation on the energy spectrum of experimental turbulence of gravity surface waves [Text] / A. Campagne [et al.] // *Physical Review Fluids*. — 2018. — Vol. 3, no. 4. — P. 044801.
93. *Mizev, A.* On the shear-driven surfactant layer instability [Text] / A. Mizev, A. Shmyrov, A. Shmyrova // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2022. — Vol. 939. — A24.
94. *Langevin, D.* Rheology of adsorbed surfactant monolayers at fluid surfaces [Text] / D. Langevin // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2014. — Vol. 46. — P. 47—65.
95. *Saffman, P.* Brownian motion in biological membranes. [Text] / P. Saffman, M. Delbrück // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 1975. — Vol. 72, no. 8. — P. 3111—3113.
96. Inhibition of wave-driven two-dimensional turbulence by viscoelastic films of proteins [Text] / N. Francois [et al.] // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 92, no. 2. — P. 023027.
97. Phase transitions on partially contaminated surface under the influence of thermocapillary flow [Text] / A. Shmyrov [et al.] // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2019. — Vol. 877. — P. 495—533.
98. Experimental simulation of the generation of a vortex flow on a water surface by a wave cascade [Text] / S. V. Filatov [et al.] // *JETP Letters*. — 2018. — Vol. 108, no. 8. — P. 519—526.
99. *Celani, A.* Turbulence in more than two and less than three dimensions [Text] / A. Celani, S. Musacchio, D. Vincenzi // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 104, no. 18. — P. 184506.
100. *Benavides, S. J.* Critical transitions in thin layer turbulence [Text] / S. J. Benavides, A. Alexakis // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2017. — Vol. 822. — P. 364—385.
101. *Ecke, R. E.* From 2D to 3D in fluid turbulence: unexpected critical transitions [Text] / R. E. Ecke // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2017. — Vol. 828. — P. 1—4.

102. *Filatov, S. V.* Formation of an energy cascade in a system of vortices on the surface of water [Text] / S. V. Filatov, D. A. Khramov, A. A. Levchenko // JETP Letters. — 2017. — Vol. 106, no. 5. — P. 330—335.
103. *Riley, N.* Steady streaming [Text] / N. Riley // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2001. — Vol. 33, no. 1. — P. 43—65.
104. *Subbotin, S.* Steady vortex flow induced by inertial wave attractor in a librating cylinder with sloping ends [Text] / S. Subbotin, M. Shiryayeva // Microgravity Science and Technology. — 2022. — Vol. 34, no. 5. — P. 89.
105. Nonlinear regimes of inertial wave attractors generated by a precessing lid: Zonal flows and Rossby waves [Text] / S. Subbotin [et al.] // Physics of Fluids. — 2023. — Vol. 35, no. 7. — P. 074110.
106. *Riley, N.* Oscillatory viscous flows. Review and extension [Text] / N. Riley // IMA Journal of Applied Mathematics. — 1967. — Vol. 3, no. 4. — P. 419—434.
107. *Lebedev, V. V.* Nearly spherical vesicles in an external flow [Text] / V. V. Lebedev, K. S. Turitsyn, S. S. Vergeles // New Journal of Physics. — 2008. — Vol. 10, no. 4. — P. 043044.
108. *Lucassen, J.* Longitudinal capillary waves [Text] / J. Lucassen // Transactions of the Faraday Society. — 1968. — Vol. 64. — P. 2221—2229.
109. *Rajan, G. K.* Dissipation of interfacial Marangoni waves and their resonance with capillary-gravity waves [Text] / G. K. Rajan // International Journal of Engineering Science. — 2020. — Vol. 154. — P. 103340.
110. *Alpers, W.* The damping of ocean waves by surface films: A new look at an old problem [Text] / W. Alpers, H. Hühnerfuss // Journal of Geophysical Research: Oceans. — 1989. — Vol. 94, no. C5. — P. 6251—6265.
111. *Belonozhko, D.* Structure of the drift flow initiated by periodic waves traveling over a viscous fluid surface [Text] / D. Belonozhko, A. Kozin // Fluid Dynamics. — 2011. — Vol. 46, no. 2. — P. 270—277.
112. *Longuet-Higgins, M. S.* The effect of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves [Text] / M. S. Longuet-Higgins // Journal of Fluid Mechanics. — 1963. — Vol. 17, no. 3. — P. 459—480.

113. *Falkovich, G.* Fluid mechanics: A short course for physicists [Text] / G. Falkovich. — Second Edition. — Cambridge : Cambridge University Press, 2018. — 219 p.
114. *Dias, F.* Nonlinear gravity and capillary-gravity waves [Text] / F. Dias, C. Kharif // Annual review of fluid mechanics. — 1999. — Vol. 31, no. 1. — P. 301—346.
115. *Колмогоров, А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса [Текст] / А. Н. Колмогоров // Доклады Академии Наук СССР. — 1941. — Т. 30, вып. 4. — С. 299.
116. *Iyer, K. P.* Scaling exponents saturate in three-dimensional isotropic turbulence [Text] / K. P. Iyer, K. R. Sreenivasan, P. Yeung // Physical Review Fluids. — 2020. — Vol. 5, no. 5. — P. 054605.
117. *Фриш, У.* Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. [Текст] / У. Фриш. — Москва : ФАЗИС, 1998. — 348 с.
118. *Molenaar, D.* Angular momentum of forced 2D turbulence in a square no-slip domain [Text] / D. Molenaar, H. Clercx, G. Van Heijst // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2004. — Vol. 196, no. 3/4. — P. 329—340.
119. *Paret, J.* Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy: Experimental observations [Text] / J. Paret, P. Tabeling // Physics of Fluids. — 1998. — Vol. 10, no. 12. — P. 3126—3136.
120. *Shats, M.* Spectral condensation of turbulence in plasmas and fluids and its role in low-to-high phase transitions in toroidal plasma [Text] / M. Shats, H. Xia, H. Punzmann // Physical Review E. — 2005. — Vol. 71, no. 4. — P. 046409.
121. *Alexakis, A.* Cascades and transitions in turbulent flows [Text] / A. Alexakis, L. Biferale // Physics Reports. — 2018. — Vol. 767. — P. 1—101.
122. *Frishman, A.* Jets or vortices—What flows are generated by an inverse turbulent cascade? [Text] / A. Frishman, J. Laurie, G. Falkovich // Physical Review Fluids. — 2017. — Vol. 2, no. 3. — P. 032602.
123. *Musacchio, S.* Condensate in quasi-two-dimensional turbulence [Text] / S. Musacchio, G. Boffetta // Physical Review Fluids. — 2019. — Vol. 4, no. 2. — P. 022602.
124. *Kan, A. van.* Condensates in thin-layer turbulence [Text] / A. van Kan, A. Alexakis // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — Vol. 864. — P. 490—518.

125. Dimensional transition in rotating turbulence [Text] / E. Deusebio [et al.] // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90, no. 2. — P. 023005.
126. *Gallet, B.* Exact two-dimensionalization of rapidly rotating large-Reynolds-number flows [Text] / B. Gallet // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2015. — Vol. 783. — P. 412—447.
127. *Spohn, T.* Treatise on geophysics [Text]. 8. Core dynamics / T. Spohn ; ed. by G. Schubert. — Amsterdam : Elsevier, 2015. — 5604 p.
128. *Hopfinger, E.* Turbulence and waves in a rotating tank [Text] / E. Hopfinger, F. Browand, Y. Gagne // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1982. — Vol. 125. — P. 505—534.
129. Extraction of coherent structures in a rotating turbulent flow experiment [Text] / J. E. Ruppert-Felsot [et al.] // *Physical Review E*. — 2005. — Vol. 72, no. 1. — P. 016311.
130. *Staplehurst, P.* Structure formation in homogeneous freely decaying rotating turbulence [Text] / P. Staplehurst, P. Davidson, S. Dalziel // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2008. — Vol. 598. — P. 81.
131. Decay laws, anisotropy and cyclone-anticyclone asymmetry in decaying rotating turbulence [Text] / F. Moisy [et al.] // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2011. — Vol. 666. — P. 5.
132. Cyclone–anticyclone asymmetry in rotating thin fluid layers [Text] / G. Boffetta [et al.] // *Journal of Turbulence*. — 2020. — P. 1—12.
133. *Yeung, P.* Numerical study of rotating turbulence with external forcing [Text] / P. Yeung, Y. Zhou // *Physics of Fluids*. — 1998. — Vol. 10, no. 11. — P. 2895—2909.
134. *Smith, L. M.* Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence [Text] / L. M. Smith, F. Waleffe // *Physics of Fluids*. — 1999. — Vol. 11, no. 6. — P. 1608—1622.
135. *Yoshimatsu, K.* Columnar eddy formation in freely decaying homogeneous rotating turbulence [Text] / K. Yoshimatsu, M. Midorikawa, Y. Kaneda // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2011. — Vol. 677. — P. 154.

136. *Seshasayanan, K.* Condensates in rotating turbulent flows [Text] / K. Seshasayanan, A. Alexakis // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2018. — Vol. 841. — P. 434—462.
137. *Naso, A.* Cyclone-anticyclone asymmetry and alignment statistics in homogeneous rotating turbulence [Text] / A. Naso // *Physics of Fluids*. — 2015. — Vol. 27, no. 3. — P. 035108.
138. Disentangling inertial waves from eddy turbulence in a forced rotating-turbulence experiment [Text] / A. Campagne [et al.] // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 91, no. 4. — P. 043016.
139. Quantitative experimental observation of weak inertial-wave turbulence [Text] / E. Monsalve [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2020. — Vol. 125, no. 25. — P. 254502.
140. *Lopez, J. M.* Inertial waves in rapidly rotating flows: a dynamical systems perspective [Text] / J. M. Lopez, F. Marques // *Physica Scripta*. — 2016. — Vol. 91, no. 12. — P. 124001.
141. Energy cascade in internal-wave attractors [Text] / C. Brouzet [et al.] // *Europhysics Letters*. — 2016. — Vol. 113, no. 4. — P. 44001.
142. Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid [Text] / G. Bordes [et al.] // *Physics of Fluids*. — 2012. — Vol. 24, no. 1. — P. 014105.
143. Direct and inverse energy cascades in a forced rotating turbulence experiment [Text] / A. Campagne [et al.] // *Physics of Fluids*. — 2014. — Vol. 26, no. 12. — P. 125112.
144. *Mininni, P.* Scale interactions and scaling laws in rotating flows at moderate Rossby numbers and large Reynolds numbers [Text] / P. Mininni, A. Alexakis, A. Pouquet // *Physics of Fluids*. — 2009. — Vol. 21, no. 1. — P. 015108.
145. *Parfenyev, V.* Statistical analysis of vortex condensate motion in two-dimensional turbulence [Text] / V. Parfenyev // *Physics of Fluids*. — 2024. — Vol. 36, no. 1.
146. *Kunze, E.* Near-inertial wave propagation in geostrophic shear [Text] / E. Kunze // *Journal of Physical Oceanography*. — 1985. — Vol. 15, no. 5. — P. 544—565.

147. *Goldenfeld, N.* Turbulence as a Problem in Non-equilibrium Statistical Mechanics [Text] / N. Goldenfeld, H.-Y. Shih // Journal of Statistical Physics. — 2017. — Vol. 167. — P. 575—594.
148. *Kolokolov, I.* Velocity statistics inside coherent vortices generated by the inverse cascade of 2-D turbulence [Text] / I. Kolokolov, V. Lebedev // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Vol. 809.
149. *Ivchenko, N. A.* Waves in a coherent two-dimensional flow [Text] / N. A. Ivchenko, S. S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, no. 10. — P. 105102.
150. *Bazant, M. Z.* Exact solutions of the Navier–Stokes equations having steady vortex structures [Text] / M. Z. Bazant, H. Moffatt // Journal of Fluid Mechanics. — 2005. — Vol. 541. — P. 55—64.
151. *Smits, A. J.* High–Reynolds number wall turbulence [Text] / A. J. Smits, B. J. McKeon, I. Marusic // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2011. — Vol. 43. — P. 353—375.
152. *Balbus, S. A.* When is high Reynolds number shear flow not turbulent? [Text] / S. A. Balbus // Journal of Fluid Mechanics. — 2017. — Vol. 824. — P. 1—4.
153. *Falkovich, G.* Interaction between mean flow and turbulence in two dimensions [Text] / G. Falkovich // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2016. — Vol. 472, no. 2191. — P. 20160287.
154. *Bretherton, F. P.* Wavetrains in inhomogeneous moving media [Text] / F. P. Bretherton, C. J. R. Garrett // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1968. — Vol. 302, no. 1471. — P. 529—554.
155. *Степанянц, Ю. А.* Распространение волн в сдвиговых потоках [Текст] / Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант. — Москва : Наука. — 240 с. — (Современные проблемы физики).
156. *Gelash, A.* Complete Hamiltonian formalism for inertial waves in rotating fluids [Text] / A. Gelash, V. L’vov, V. Zakharov // Journal of Fluid Mechanics. — 2017. — Vol. 831. — P. 128—150.
157. *Salhi, A.* An analysis of rotating shear flow using linear theory and DNS and LES results [Text] / A. Salhi, C. Cambon // Journal of Fluid Mechanics. — 1997. — Vol. 347. — P. 171—195.

158. *Cambon, C.* Anisotropic developments for homogeneous shear flows [Text] / C. Cambon, R. Rubinstein // *Physics of Fluids*. — 2006. — Vol. 18, no. 8. — P. 085106.
159. *Frishman, A.* Turbulence statistics in a two-dimensional vortex condensate [Text] / A. Frishman, C. Herbert // *Physical Review Letters*. — 2018. — Vol. 120, no. 20. — P. 204505.
160. *Staquet, C.* Internal gravity waves: from instabilities to turbulence [Text] / C. Staquet, J. Sommeria // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2002. — Vol. 34, no. 1. — P. 559—593.
161. *Sansón, L. Z.* Nonlinear Ekman effects in rotating barotropic flows [Text] / L. Z. Sansón, G. Van Heijst // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2000. — Vol. 412. — P. 75—91.
162. *Chertkov, M.* Universal velocity profile for coherent vortices in two-dimensional turbulence [Text] / M. Chertkov, I. Kolokolov, V. Lebedev // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 81, no. 1. — P. 015302.
163. *Vallis, G. K.* Atmospheric and oceanic fluid dynamics [Text] / G. K. Vallis. — Cambridge : Cambridge University Press, 2017. — 772 p.
164. *Pedlosky, J.* Geophysical Fluid Dynamics [Text] / J. Pedlosky. — Second edition. — New York : Springer-Verlag, 1987. — 720 p.
165. *Kolokolov, I.* Coherent vortex in two-dimensional turbulence: Interplay of viscosity and bottom friction [Text] / I. Kolokolov, V. Lebedev // *Physical Review E*. — 2020. — Vol. 102, no. 2. — P. 023108.
166. Internally driven inertial waves in geodynamo simulations [Text] / A. Ranjan [et al.] // *Geophysical Journal International*. — 2018. — Vol. 213, no. 2. — P. 1281—1295.
167. Discontinuous Transitions Towards Vortex Condensates in Buoyancy-Driven Rotating Turbulence: Analogies with First-Order Phase Transitions [Text] / X. M. de Wit [et al.] // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2022. — Vol. 936. — A43.
168. *Parker, J. B.-C.* Zonal flows and turbulence in fluids and plasmas [Text] : PhD thesis / Parker Jeffrey Bok-Cheung. — Princeton University, 2014.

169. On the detection of Reynolds stress as a driving and damping mechanism of geodesic acoustic modes and zonal flows [Text] / M. Ramisch [et al.] // New Journal of Physics. — 2003. — Vol. 5, no. 1. — P. 12.
170. Experimental confirmation of self-regulating turbulence paradigm in two-dimensional spectral condensation [Text] / L. Bardóczy [et al.] // Physical Review E. — 2014. — Vol. 90, no. 6. — P. 063103.
171. *Miyazaki, T.* Linear and nonlinear interactions between a columnar vortex and external turbulence [Text] / T. Miyazaki, J. C. Hunt // Journal of Fluid Mechanics. — 2000. — Vol. 402. — P. 349—378.
172. *Nazarenko, S.* Nonlinear RDT theory of near-wall turbulence [Text] / S. Nazarenko, N.-R. Kevlahan, B. Dubrulle // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2000. — Vol. 139, no. 1/2. — P. 158—176.
173. *Galtier, S.* Weak inertial-wave turbulence theory [Text] / S. Galtier // Physical Review E. — 2003. — Vol. 68, no. 1. — P. 015301.
174. *Champagne, F.* Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow [Text] / F. Champagne, V. Harris, S. Corrsin // Journal of Fluid Mechanics. — 1970. — Vol. 41, no. 1. — P. 81—139.
175. *Sansón, L. Z.* The asymmetric Ekman decay of cyclonic and anticyclonic vortices [Text] / L. Z. Sansón // European Journal of Mechanics-B/Fluids. — 2001. — Vol. 20, no. 4. — P. 541—556.
176. Coherent Vortex in Two-Dimensional Turbulence around a Rotating Disc. [Text] / A. B. Buzovkin [et al.] // JETP Letters. — 2020. — Vol. 111, no. 8. — P. 442—446.
177. *Yokoyama, N.* Hysteretic transitions between quasi-two-dimensional flow and three-dimensional flow in forced rotating turbulence [Text] / N. Yokoyama, M. Takaoka // Physical Review Fluids. — 2017. — Vol. 2, no. 9. — P. 092602.
178. *Woillez, E.* Theoretical prediction of Reynolds stresses and velocity profiles for barotropic turbulent jets [Text] / E. Woillez, F. Bouchet // EPL (Europhysics Letters). — 2017. — Vol. 118, no. 5. — P. 54002.
179. *Riley, N.* Unsteady laminar boundary layers [Text] / N. Riley // SIAM review. — 1975. — Vol. 17, no. 2. — P. 274—297.

180. *Villermaux, E.* Mixing versus stirring [Text] / E. Villermaux // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2019. — Vol. 51, no. 1. — P. 245—273.
181. *Groisman, A.* Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives [Text] / A. Groisman, V. Steinberg // Nature. — 2001. — Vol. 410. — P. 905—908.
182. *Groisman, A.* Elastic turbulence in a polymer solution flow [Text] / A. Groisman, V. Steinberg // Nature. — 2000. — Vol. 405. — P. 53—55.
183. *Donzis, D. A.* The Batchelor spectrum for mixing of passive scalars in isotropic turbulence [Text] / D. A. Donzis, K. Sreenivasan, P. Yeung // Flow, turbulence and combustion. — 2010. — Vol. 85, no. 3. — P. 549—566.
184. *Speetjens, M.* Lagrangian transport and chaotic advection in three-dimensional laminar flows [Text] / M. Speetjens, G. Metcalfe, M. Rudman // Applied Mechanics Reviews. — 2021. — Vol. 73, no. 3. — P. 030801.
185. Application of astigmatism μ -PTV to analyze the vortex structure of AC electroosmotic flows [Text] / Z. Liu [et al.] // Microfluidics and nanofluidics. — 2014. — Vol. 16. — P. 553—569.
186. *Kolokolov, I.* Magnetic field correlations in random flow with strong steady shear [Text] / I. Kolokolov, V. Lebedev, G. Sizov // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2011. — Vol. 113, no. 2. — P. 339—351.
187. Investigation of turbulent mixing in a confined planar-jet reactor [Text] / H. Feng [et al.] // AIChE journal. — 2005. — Vol. 51, no. 10. — P. 2649—2664.
188. *Amarouchene, Y.* Batchelor scaling in fast-flowing soap films [Text] / Y. Amarouchene, H. Kellay // Physical Review Letters. — 2004. — Vol. 93, no. 21. — P. 214504.
189. *Jun, Y.* Mixing of passive tracers in the decay Batchelor regime of a channel flow [Text] / Y. Jun, V. Steinberg // Physics of Fluids. — 2010. — Vol. 22, no. 12. — P. 123101.
190. *Obukhov, A. M.* Structure of temperature field in turbulent flow [Text] / A. M. Obukhov // Izvestia Akademii Nauk SSSR. Seriya geograficheskaya i Geofizicheskaya. — 1949. — Vol. 13, no. 1. — P. 58—69.
191. *Corrsin, S.* On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence [Text] / S. Corrsin // Journal of Applied Physics. — 1951. — Vol. 22, no. 4. — P. 469—473.

192. *Batchelor, G. K.* Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid Part 1. General discussion and the case of small conductivity [Text] / G. K. Batchelor // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1959. — Vol. 5, no. 1. — P. 113—133.
193. *Sreenivasan, K. R.* Turbulent mixing: A perspective [Text] / K. R. Sreenivasan // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2019. — Vol. 116, no. 37. — P. 18175—18183.
194. *Shraiman, B. I.* Lagrangian path integrals and fluctuations in random flow [Text] / B. I. Shraiman, E. D. Siggia // *Physical Review E*. — 1994. — Vol. 49, no. 4. — P. 2912.
195. *Chertkov, M.* Decay of scalar turbulence revisited [Text] / M. Chertkov, V. Lebedev // *Physical Review Letters*. — 2003. — Vol. 90, no. 3. — P. 034501.
196. *Kraichnan, R. H.* Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence [Text] / R. H. Kraichnan // *The Physics of Fluids*. — 1968. — Vol. 11, no. 5. — P. 945—953.
197. Mixing lamellae in a shear flow [Text] / M. Souzy [et al.] // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2018. — Vol. 838. — R3.
198. *Зыбин, К. П.* Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности [Текст] / К. П. Зыбин, В. А. Сирота // *Успехи Физических Наук*. — 2015. — Т. 185, № 6. — С. 593—612.
199. *Gawedzki, K.* Stochastic processes in turbulent transport [Text] / K. Gawedzki // *arXiv preprint arXiv:0806.1949*. — 2008.
200. *Turitsyn, K.* Polymer dynamics in chaotic flows with a strong shear component [Text] / K. Turitsyn // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 2007. — Vol. 105, no. 3. — P. 655—664.
201. *Smith, D. E.* Single-polymer dynamics in steady shear flow [Text] / D. E. Smith, H. P. Babcock, S. Chu // *Science*. — 1999. — Vol. 283, no. 5408. — P. 1724—1727.
202. *Liu, Y.* Stretching of polymer in a random flow: Effect of a shear rate [Text] / Y. Liu, V. Steinberg // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2010. — Vol. 90, no. 4. — P. 44005.
203. Diffusing up the hill: Dynamics and equipartition in highly unstable systems [Text] / M. Šiler [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2018. — Vol. 121, no. 23. — P. 230601.

204. *Puliafito, A.* Numerical study of polymer tumbling in linear shear flows [Text] / A. Puliafito, K. Turitsyn // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2005. — Vol. 211, no. 1/2. — P. 9—22.
205. *Iwasawa, K.* On some types of topological groups [Text] / K. Iwasawa // *Annals of Mathematics*. — 1949. — Vol. 50. — P. 507—558.
206. *Gamba, A.* Dissipation statistics of a passive scalar in a multidimensional smooth flow [Text] / A. Gamba, I. V. Kolokolov // *Journal of statistical physics*. — 1999. — Vol. 94, no. 5/6. — P. 759—777.
207. Fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar [Text] / E. Balkovsky [et al.] // *JETP Letters*. — 1995. — Vol. 61. — P. 1049—1054.
208. *Ellis, R. S.* Entropy, large deviations, and statistical mechanics [Text] / R. S. Ellis. — Reprint of the 1985 Edition. — Berlin : Springer, 2006. — 371 p.
209. *Corrsin, S.* The decay of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence [Text] / S. Corrsin // *Journal of the Aeronautical Sciences*. — 1951. — Vol. 18, no. 6. — P. 417—423.
210. *Ivchenko, N. A.* Mixing in two-dimensional shear flow with smooth fluctuations [Text] / N. A. Ivchenko, V. V. Lebedev, S. S. Vergeles // *Physical Review E*. — 2024. — Vol. 110, no. 1. — P. 015102.
211. *Kolokolov, I. V.* Statistical geometry of chaotic two-dimensional transport [Text] / I. V. Kolokolov // *JETP letters*. — 2010. — Vol. 92, no. 2. — P. 107—109.
212. *Gamba, A.* The Lyapunov spectrum of a continuous product of random matrices [Text] / A. Gamba, I. V. Kolokolov // *Journal of statistical physics*. — 1996. — Vol. 85. — P. 489—499.
213. NIST handbook of mathematical functions hardback [Text] / ed. by F. W. Olver. — Cambridge : NIST, Cambridge University Press, 2010. — 957 p.
214. Polymer statistics in a random flow with mean shear [Text] / M. Chertkov [et al.] // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2005. — Vol. 531. — P. 251—260.
215. *Klyatskin, V.* Short-time correlation approximations for diffusing tracers in random velocity fields: A functional approach [Text] / V. Klyatskin, W. Woyczynski, D. Gurarie // *Stochastic modelling in physical oceanography*. — Springer, 1996. — P. 221—269.

- 216. *Kolokolov, I.* Statistical properties of passive scalar in a random flow with a strong shear component [Text] / I. Kolokolov, N. T. Trung // *Physics Letters A*. — 2012. — Vol. 376, no. 23. — P. 1836—1838.
- 217. *Majda, A. J.* The random uniform shear layer: an explicit example of turbulent diffusion with broad tail probability distributions [Text] / A. J. Majda // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. — 1993. — Vol. 5, no. 8. — P. 1963—1970.
- 218. *Avellaneda, M.* Superdiffusion in nearly stratified flows [Text] / M. Avellaneda, A. J. Majda // *Journal of statistical physics*. — 1992. — Vol. 69, no. 3. — P. 689—729.

Список рисунков

- 1.1 Зависимости от обратного значения безразмерного модуля упругого сжатия плёнки $1/\varepsilon$: а) отношения амплитуд горизонтальной и вертикальной компонент скорости (амплитуд колебаний) лагранжевой частицы в волне (1.36); б) обратной добротности волны (1.35). Численное значение $\gamma \approx 1/120$, что соответствует волнам на воде при частоте 3 Гц. Синими точечными линиями показаны асимптотики для чистой поверхности, при $\varepsilon \rightarrow 0$ 41
- 1.2 Схематическое изображение генерации медленного вихревого течения бегущей волной в слабо вязкой жидкости. 49
- 1.3 Экспериментально измеренная завихренность ω_z^V и теоретические оценки, сделанные в различных приближениях. а) Процесс установления вихревого течения после включения плунжеров; фиолетовая кривая “теория” соответствует (1.98), синяя кривая “числ. счёт” соответствует (1.96) численно проинтегрированному по времени с величинами, взятыми из экспериментальных данных . б) Процесс затухания течения после выключения плунжеров. фиолетовая кривая “теория” соответствует (1.101), синяя кривая “числ. счёт” . соответствует тому же (1.96), где теперь время сдвинуто на t^* 63
- 1.4 Схематичное изображение формы поверхности волны (1.102) и соответствующего вклада в горизонтальную скорость, связанную с вертикальной завихренностью. Цвет соответствует значению завихренности в некоторых произвольных единицах измерения. Стрелки показывают соответствующее поле скорости. Значение угла между волнами было выбрано равным $2\theta = \pi/15$, а также принято $H_1 = H_2$ 65

- 1.5 Установление (а) и распад (b,c) вихревого течения ϖ_z^v на поверхности жидкости ($z = 0$) при различных глубинах жидкости (численное решение). Кривые для неограниченной глубины соответствуют выражениям (1.97) и (1.101) с заменой $F/\sqrt{2} \rightarrow F \cos \theta$. Асимптотическое значение при больших временах для процесса установления дано в выражениях (1.111). Пунктирные линии соответствуют асимптотическому поведению (1.112). Рисунок 1.5b демонстрирует, что скорость затухания завихренности течения на поверхности не зависит от глубины жидкости на малых временах $t \ll d^2/\nu$, смотри выражение (1.113), а Рисунок 1.5c демонстрирует экспоненциальное затухание на больших временах $t \gg d^2/\nu$, смотри уравнение (1.112). 69
- 2.1 Схематичное изображение когерентного вихря и введённых глобальной цилиндрической системы координат $\{r_\perp, \varphi, z\}$ и локальной декартовой системы координат $\{\xi, \eta, z\}$ 87
- 2.2 Схематичное изображение соотношения геометрии течения и направления потока импульса. Для определённости выбран знак $\Sigma(r_\perp) < 0$. Красная стрелка изображает турбулентную часть потока ξ -компоненты импульса в η -направлении. Виртуальная граница отсутствует для вихревого течения, она добавлена для сравнения со случаем течения в канале при отсутствии глобального вращения. 88
- 2.3 Движение вдоль характеристик в $\mathbf{k}$ -пространстве в сдвиговом течении. Незакрашенные кружки соответствуют значению волнового вектора в момент $t = -\tau/\Sigma$, когда турбулентная пульсация была возбуждена внешней силой. Возбуждение течения происходит главным образом внутри красного круга, определяемого равенством $k = k_f$. Линии являются решениями (2.24), их длина соответствует времени наблюдения $t = 0$ 94
- 2.4 Карты распределения завихренности ϖ_z^v геострофического течения для а) низкой (0.12 Гц) и б) высокой (0.72 Гц) скоростей вращения Ω_0 куба [64]. Жёлтый цвет соответствует циклоническому движению, синий — антициклоническому. 111

- 3.1 Радиальный профиль азимутальной скорости V^G для циклона, когда $\Sigma = -\Sigma_0$, построенный в универсальных единицах. Пунктирная часть графика соответствует области сердцевины вихря, $r_\perp \lesssim r_u$, и имеет только качественный смысл. Было выбрано $R_u/r_u \approx 5$ 127
- 3.2 Результаты численного расчёта безразмерного тангенциального напряжения Рейнольдса $F(R_o, \gamma) = \Sigma \langle u_\varphi u_{r_\perp} \rangle / \epsilon$ при (а) малых и (b) больших отрицательных числах Россби $R_o = -\Sigma / (2\Omega) < 0$, соответствующих антициклону. На панели (а) пунктирная линия, соответствующая кривой $Q = 1$, совпадает с линией $F = 0$, см. уравнение (2.16). На панели (b) функция $F(R_o, \gamma)$ перестаёт зависеть от параметра R_o над пунктирной линией, что соответствует результатам работы [172]. 129
- 3.3 Результаты численного расчёта безразмерного тангенциального напряжения Рейнольдса $F(R_o, \gamma) = \Sigma \langle u_\varphi u_r \rangle / \epsilon$ при положительных числах Россби $R_o = -\Sigma / (2\Omega) > 0$, что соответствует циклону. Пунктирная линия, соответствующая кривой $Q = 1$, совпадает с линией $F = 0$, см. (2.16). 130
- 3.4 Зависимость профиля скорости в циклоне от параметра Re_f (левая панель, $Ro_R = 0.5$) и от параметра Ro_R (правая панель, $Re_f = 20$). (a,b) Азимутальная скорость в циклоне V^G и (c,d) сила сдвига Σ как функции радиальной безразмерной координаты $r_\perp / R_u$, $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon / \nu}$. (e,f) Изменение локальных параметров R_o и γ внутри циклона. Маркеры показывают точки, соответствующие границе вихря $r_\perp / R_u = 1$. Область кривых вниз от маркеров соответствует движению к оси вихря, противоположное направление соответствует периферии вихря (показано штрихованными цветными линиями). Чёрная пунктирная линия соответствует условию $F/R_o = 1/2$ (одна вторая принимает во внимание анизотропию турбулентных пульсаций), выше этой кривой линейный анализ динамики турбулентных пульсаций становится неприменимым. 131

- 3.5 Зависимость профиля скорости антициклона от параметра Re_f (левая панель, $Ro_R = 0.5$) и от параметра Ro_R (правая панель, $Re_f = 20$). (a,b) Азимутальная скорость V^G и (c,d) скорость локального сдвига Σ как функции безразмерной радиальной координаты $r_\perp/R_u$, $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon/\nu}$. (e,f) Изменение локальных чисел Ro и γ внутри вихря. Маркеры показывают точки, соответствующие внешнему краю вихря $r_\perp/R_u = 1$. Область цветных кривых справа-вверху от маркеров соответствует смещению к оси вихря, в противоположном направлении – к его периферии (эти участки цветных кривых показаны пунктирной линией на левой панели). Чёрная пунктирная линия соответствует условию $F/Ro = 1/2$ (одна вторая учитывает анизотропию скорости). Выше этой кривой линейный анализ динамики мелкомасштабных турбулентных пульсаций неприменим. 135
- 3.6 Схематическое изображение течения, возникающего в вихре-циклоне. Маленькие вертикальные и горизонтальные стрелки изображают вертикальную и радиальную компоненты вторичного течения. В случае антициклона направления этих стрелок, включая стрелки, изображающие подсос Экмана, должны быть изменены на обратные. 142
- 3.7 Профиль скорости когерентного вихря, полученный в результате численного решения уравнения (3.34). Чёрная пунктирная линия соответствует асимптотическому поведению, описываемому выражениями (3.35) and (3.36). Закрашенная область $r_\perp \lesssim 1/(k_f Ro)$ соответствует области сердцевинки вихря, где азимутальная скорость соответствует почти твердотельному вращению жидкости. 146
- 3.8 Профили азимутальной скорости вихря $V^G(r_\perp)$ (сплошная красная линия), величины $\Gamma'(r_\perp) = r_\perp \cdot \varpi^G$ (штрих-пунктирная синяя линия), величина аппроксимации профиля скорости среднего течения на далёких расстояниях $\bar{\omega} \cdot r_\perp/2$ (прямая синяя пунктирная прямая), профиль азимутальной скорости с вычтенным профилем скорости среднего течения $V^G(r_\perp) - \bar{\omega} \cdot r_\perp/2$ (чёрная пунктирная линия). а) Низкая 0.72 Гц, $\bar{\omega} = 0.06 \text{ с}^{-1}$; б) высокая 0.12 Гц, $\bar{\omega} = 0.047 \text{ с}^{-1}$ скорости вращения Ω_0 куба [64]. 149

- 3.9 а) Схематическая цветовая карта распределения завихренности в пространстве для средней завихренности $\varpi^G = r_\perp^{-1} \partial_{r_\perp} (r_\perp V_\varphi^G)$ в когерентном вихре в присутствии аксиально симметричной волны. Красная область цветовой карты соответствует превышению завихренностью максимального порога. б) Структура высоко-частотной волны конденсата, распространяющейся от оси вихря. Для того, чтобы изобразить волну, распространяющуюся к оси вихря, следует учесть, что напряжение Рейнольдса τ меняет знак при обращении направления $r_\perp$ -оси. 156
- 3.10 Графики зависимостей K и D , см. определение (3.45), как функций безразмерной частоты $\tilde{\omega} = \omega/2\nu k_f^2$ в логарифмической шкале. Выбранные значения параметров: $\gamma = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}\nu k_f^2$ 157
- 3.11 Положение в зависимости от расстояния до оси вихря частотных диапазонов, в которых существуют низко-частотных моды и моды со слабым затуханием. Плоскость r - ω построена в логарифмической шкале. Максимально возможный радиус вихря $R_u = \sqrt{\text{Re}_f} R_{\nu/\alpha}$. Было выбрано значение числа Рейнольдса $\text{Re}_f = 10^4$ для оценки (3.74). 165
- 4.1 Схематическое изображение разделения надоусреднённой корреляционной функции 4-го порядка на сумму произведений парных средних (4.79). 204
- 4.2 Оптимальная флуктуация, формирующая корреляционную функцию скаляра четвёртой степени. Максимальное значение степени растяжения $\varrho^{(i)} = a_\kappa + a + a_\perp$ 211
- 4.3 Асимптотические области поведения корреляционной функции четвёртого порядка на плоскости переменных ζ - Υ . Время $\ln \text{Pe} < \tau \ll (\ln \text{Pe})^2$ 219
- 4.4 Графики стационарных функций распределения угла $\mathcal{P}_{\text{st}}(\psi)$ и $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}(\tilde{\psi})$. Для того, чтобы было видно поведение хвостов функции распределения, была построена также функция $\sin^2 \psi \mathcal{P}_{\text{st}}(\psi)$. Было взято значение малого параметра $D/\Sigma = 10^{-3}$ 224

- 4.5 Схематическое изображение расположения различных асимптотик пространственно-временной зависимости парной корреляционной функции скаляра F в распадной задаче. Сплошная кривая соответствует $\tilde{r} = r_\kappa$. Ярко-красный соответствует неизменной амплитуде F , этому соответствует первая асимптотика в (4.76). Осветлённый красный и белый соответствуют сниженной амплитуде F , чему соответствует вторая асимптотика в (4.76). Внутренний фронт двигается вниз по масштабам пока не достигает диффузионного масштаба, $\tilde{r} \sim r_\kappa$. После этого амплитуда F становится всюду сниженной. Левая рисунок соответствует анизотропной задаче (4.139), правый — изотропной, см. Пункт 4.3.1. . 226
- 4.6 Оптимальная флуктуация, формирующая одноточечный момент (4.166), в случае $\alpha < \alpha_{cr}$. Коричневая кривая демонстрирует пример оптимальной флуктуации для первой асимптотики в (4.166), а зелёная кривая — для последней. Толстая серая линия есть конечные точки процесса $\tilde{\varrho}(t)$ при оптимальных флуктуациях течения. 230
- Б.1 Контур интегрирования при обратном преобразовании Фурье функции Крамера для нулевого и первого собственных значений, исходные обозначены непрерывными синей и красной линиями. Чёрными прерывистыми линиями обозначены разрезы. 280

Приложение А

Формирование и затухание крупномасштабных вихрей

А.1 Формирование завихренности

Как было показано в основном тексте, процесс установления вертикальной завихренности ϖ_z^V описывается уравнением (1.94) с $\Lambda(x)$ (1.103) и F (1.105) и граничными условиями

$$\varpi_z^V|_{z=\pm d} = 0, \quad \varpi_z^V|_{t=0} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Чтобы найти распределение завихренности по вертикали и её зависимость от времени в процессе установления, выполним преобразование Лапласа по времени,

$$\tilde{\varpi}_z^V(p) = \int_0^\infty d(t/t_E) e^{-pt/t_E} \varpi_z^V(t), \quad (\text{A.2})$$

где, напомним, $t_E = l^2/\nu$ и $l = (2k \sin \theta)^{-1}$. Решением при $z < 0$ является

$$\tilde{\varpi}_z^V(p, x, z) = \frac{F \Lambda(x) \sin(2\theta) \sinh[\sqrt{p+1}(z+d)/L]}{4p\sqrt{p+1} \cosh[\sqrt{p+1}d/L]}. \quad (\text{A.3})$$

В процессе вычисления обратного преобразования Лапласа заметим, что полюс $p = 0$ соответствует стационарному решению, а точки, в которых $\cosh[\sqrt{p+1}d/l] = 0$, дают бесконечный ряд, описывающий эволюцию к этому стационарному состоянию:

$$\begin{aligned} \varpi_z^V(t, x, z) = F \Lambda(x) \sin(2\theta) & \left(\frac{\sinh[(z+d)/l]}{\cosh[d/l]} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\exp\left[-\frac{t}{t_E} \left(1 + \frac{\pi^2 l^2 (2n+1)^2}{4d^2}\right)\right]}{\frac{d}{2l} \left(1 + \frac{\pi^2 l^2 (2n+1)^2}{4d^2}\right)} \sin\left[\frac{\pi}{2} (2n+1) \left(1 + \frac{z}{d}\right)\right] \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Величина эйлеровой завихренности на поверхности представляет особый интерес по причине простоты её измерения в эксперименте. Подставим $z = 0$ в выражение (A.4) и получим:

$$\frac{d\varpi_z^V(t, x, 0)}{d(t/t_E)} = F \Lambda(x) \sin(2\theta) \frac{l}{d} \exp(-t/t_E) \vartheta_2\left[0, \exp(-\nu \pi^2 t/d^2)\right], \quad (\text{A.5})$$

где $\vartheta_2[u, q]$ есть тета-функция Якоби. На малых временах $t \ll d^2/\nu$ динамика завихренности не зависит от глубины жидкости d и определяется выражением

$$\frac{d\varpi_z^V(t, x, 0)}{d(t/t_E)} = F\Lambda(x) \sin(2\theta) \frac{\exp(-t/t_E)}{\sqrt{\pi t/t_E}} \Rightarrow \quad (A.6)$$

$$\varpi_z^V(t, x, 0) = F\Lambda(x) \sin(2\theta) \operatorname{Erf} \left[\sqrt{t/t_E} \right].$$

На больших временах $t \gg \min(t_E, d^2/\nu)$ завихренность достигает своего стационарного значения, которое определяется первым слагаемым в (A.4). Отметим, что для жидкости с малой глубиной $d \ll l$ стационарное решение достигается быстрее чем для неограниченно глубокой жидкости.

A.2 Затухание завихренности

В этом же духе рассмотрим процесс затухания завихренности, после того, как при возбуждённых волнах завихренность ϖ_z^V достигла своего стационарного значения, а затем волновое течение исчезло в некоторый момент времени. В этом случае нам надо решить уравнение диффузии с граничными условиями

$$\partial_t \varpi_z^V - \nu \nabla^2 \varpi_z^V = 0, \quad \partial_z \varpi_z^V|_{z=0} = 0, \quad \varpi_z^V|_{z=-d} = 0, \quad (A.7)$$

и с начальным условием

$$\varpi_z^V(0, x, z) = F\Lambda(x) \sin(2\theta) \frac{\sinh[(z+d)/l]}{\cosh[d/l]}, \quad (A.8)$$

которое есть стационарное решение (A.4). Образ Лапласа по времени вертикальной завихренности есть

$$\tilde{\varpi}_z^V(p, x, z) = F\Lambda(x) \sin(2\theta) \left(\frac{\sinh[(d+z)/l]}{p \cosh[d/l]} - \frac{\sinh[\sqrt{p+1}(z+d)/l]}{p\sqrt{p+1} \cosh[\sqrt{p+1}d/l]} \right). \quad (A.9)$$

Вычет при $p = 0$ равен нулю. После обратного преобразования Лапласа получаем:

$$\varpi_z^V(t, x, z) = F\Lambda(x) \sin(2\theta) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\exp \left[-\frac{t}{t_E} \left(1 + \frac{\pi^2 l^2 (2n+1)^2}{4d^2} \right) \right]}{\frac{d}{2l} \left(1 + \frac{\pi^2 l^2 (2n+1)^2}{4d^2} \right)} \sin \left[\frac{\pi}{2} (2n+1) \left(1 + \frac{z}{d} \right) \right]. \quad (A.10)$$

Слагаемое с $n = 0$ определяет асимптотическое поведение на больших временах $t \gg d^2/\nu$. Можно также проанализировать начало процесса затухания завихренности на поверхности. На малых временах $t \ll d^2/\nu$, находим

$$\frac{d\varpi_z^v(t, x, 0)}{d(t/t_E)} = -F\Lambda(x) \sin(2\theta) \frac{\exp(-t/t_E)}{\sqrt{\pi t/t_E}} \Rightarrow \quad (\text{A.11})$$

$$\varpi_z^v(t, x, 0) = F\Lambda(x) \sin(2\theta) \left(\tanh(d/l) - \text{Erf} \left[\sqrt{t/t_E} \right] \right).$$

Приложение Б

Модель коротко-коррелированного по времени поля скорости

В этом Приложении мы найдём энтропийную функцию (4.19) и установим уравнения на парную и четверную корреляционные функции пассивного скаляра в модели коротко коррелированного во времени поля скорости.

Б.1 Статистические свойства поля скорости

Считая поле скорости коротко-коррелированным во времени и имеющем однородную статистику в пространстве, определим разновременные парные корреляционную и структурную функции поля скорости

$$\langle (v_i(t+t', \mathbf{r} + \mathbf{r}') v_j(t, \mathbf{r}')) \rangle = \delta(t) \mathcal{K}_{ij}(\mathbf{r}), \quad (\text{Б.1})$$

$$\langle (v_i(t+t', \mathbf{r} + \mathbf{r}') - v_i(t+t', \mathbf{r}')) (v_j(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}') - v_j(t, \mathbf{r}')) \rangle = \delta(t) \mathcal{S}_{ij}(\mathbf{r}). \quad (\text{Б.2})$$

Искусственное поле (Б.1) называется моделью Крайчнана [196]. В общем случае связь между корреляционной и структурной функциями имеет вид

$$\mathcal{S}_{ij}(\mathbf{r}) = 2\mathcal{K}_{ij}(0) - \mathcal{K}_{ij}(\mathbf{r}) - \mathcal{K}_{ji}(\mathbf{r}). \quad (\text{Б.3})$$

Корреляционная функция $\mathcal{K}_{ij}(\mathbf{r})$ удовлетворяет тем же симметричным свойствам, что и одновременная корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{r})$ (2.50).

В соответствии с общим выражением (Б.2), мы моделируем процесс $\hat{\sigma}(t)$ (4.2) ланжевеновским шумом,

$$\langle \sigma_{i\alpha}(0) \sigma_{k\beta}(t) \rangle = \delta(t) D \left((d+1) \delta_{ik} \delta_{\alpha\beta} - \delta_{i\alpha} \delta_{k\beta} - \delta_{i\beta} \delta_{k\alpha} \right). \quad (\text{Б.4})$$

Функциональная мера интегрирования, обеспечивающая статистику (Б.4), есть [206]

$$\mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\lambda e^{-S_\sigma + i\lambda \text{tr} \hat{\sigma}}, \quad S_\sigma = \frac{1}{2d(d+2)} \int_0^{+\infty} dt \left((d+1) \text{tr} (\hat{\sigma} \hat{\sigma}^T) + \text{tr} (\hat{\sigma}^2) \right). \quad (\text{Б.5})$$

Корреляционная функция (Б.4) градиента поля скорости соответствует следующей структурной функции на малых расстояниях:

$$\mathcal{S}_{ij}(\mathbf{r}) = D((d+1)r^2\delta_{ik} - 2r_i r_k). \quad (\text{Б.6})$$

Для того, чтобы приступить к вычислению энтропийной функции (4.19), определим статистику матрицы $\hat{\sigma}^n$ (4.13) в пределе сильной деформации (4.17). Неприводимая часть парного среднего $\hat{\sigma}^n$ имеет ту же статистику (Б.4), поскольку корреляционная функция (Б.4) инвариантна относительно вращений. Среднее (4.18) можно вычислить путём выделения так называемых контактных членов. Согласно (4.13, 4.16), матрица поворота

$$\hat{\mathcal{N}}(t) - \hat{\mathcal{N}}(t - \tau) \approx \hat{\mathcal{N}}(t - \tau) \int_{t-\tau}^t dt' \hat{\Omega}^n(t') \quad (\text{Б.7})$$

Подставим теперь сюда выражение для угловой скорости вращения (4.16) и произведём усреднение по статистике (Б.4). При этом в рамках обозначений (Б.4) интегрирование производится до $t = 0$, т.е. ‘до середины’ δ -функции, которая является симметричной вследствие однородности статистики по времени — отсюда возникает множитель $1/2$. Таким образом, получаем

$$\lambda_i = \langle \tilde{\sigma}_{ii} \rangle = \frac{dD}{2} \sum_j (\theta_{ji} - \theta_{ij}) = \frac{d(d+1-2i)D}{2}, \quad (\text{Б.8})$$

где $\theta_{ij} = 1$ при $i > j$, а в противном случае $\theta_{ij} = 0$. В частности, старшая ляпуновская экспонента

$$\lambda = \frac{d(d-1)D}{2}. \quad (\text{Б.9})$$

Уравнение на экспоненты (4.18) теперь можно переписать в виде

$$\partial_t \varrho_i = \lambda_i + \xi_i, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t + \tau) \rangle = \delta(\tau) D(d\delta_{ij} - 1). \quad (\text{Б.10})$$

Для трёх-мерного случая, $d = 3$, старшая ляпуновская экспонента $\lambda = 3D$, а следующая экспонента Ляпунова $\lambda_2 = 0$, энтропийная функция определяется (4.67).

Отметим, что если бы мы вычисляли без предположения о сильной деформации (4.17), то вместо разности $\theta_{ji} - \theta_{ij}$ в (Б.8) получилось бы $\coth(\varrho_i - \varrho_j)$. В результате бы уравнение на совместную функцию распределения $\mathcal{P}(t, \{\varrho_i\})$ после соответствующего преобразования приняло бы форму уравнения Шредингера с гамильтонианом Калоджеро-Сутерланда-Мосера (Calogero-Sutherland-Moser) [199], решение которого в двумерном случае выражается в терминах гипергеометрической функции ${}_2F_1$.

Б.2 Свойства разложения Ивасава матрицы W

Представим матрицу $\hat{W}$ в виде

$$\hat{W} = \hat{Q}\hat{D}\hat{T}, \quad \hat{T} = \hat{1} + \hat{X}, \quad X_{ij} = 0 \text{ at } i \geq j, \quad (\text{Б.11})$$

где $\hat{Q}$ — ортогональная матрица, $\hat{D}$ — диагональная матрица, а $\hat{T}$ — верхнетреугольная матрица с единичными элементами на диагонали. Мы, как и раньше, параметризуем диагональную матрицу экспонентами растяжений, $D_{ii} = \exp(\rho_i)$, или $\hat{D} = \exp(\hat{\rho})$. Отметим, что условие несжимаемости формально приводит к тому же условию (4.12) $\rho_1 + \dots = \rho_d = 0$.

Вычислим якобиан перехода J от переменных интегрирования σ в функциональном интегрировании (Б.5) к переменным интегрирования $\rho, \hat{X}, \hat{Q}$. Для упрощения вычислений оказывается удобным подобрать правильную регуляризацию по времени [206]. Пусть моменты времени $t_k = h \cdot k$, где k — целое число, а h — (инфинитезимально) малый шаг по времени. Положим, что на временной сетке дискретной версией уравнения (4.9) на динамику матрицы $\hat{W}$ является

$$\hat{\sigma}_k = \frac{\hat{W}_k - \hat{W}_{k-1}}{h} \hat{T}_k^{-1} \hat{D}_{k-1}^{-1} \hat{Q}_{k-1}^T. \quad (\text{Б.12})$$

Положим, что

$$\mathcal{Q}_k = (1 + h\hat{\phi}_1) \dots (1 + h\hat{\phi}_k), \quad \dot{\hat{X}}_k \equiv \frac{\hat{X}_k - \hat{X}_{k-1}}{h} \quad (\text{Б.13})$$

где матрицы $\hat{\phi}_h$ являются антисимметричными. Из определений (Б.12, Б.13) следует, что в t -пространстве связь между σ_k определяется только $\hat{\rho}_{k'}, \hat{X}_{k'}, \hat{\phi}_{k'}$ с $k' \leq k$. Таким образом, для вычисления якобиана перехода необходимо вычислить только диагональные вариации σ_k по новым переменным с $k' = k$. Прежде чем вычислять эти вариации дополнительно ещё заметим, что каждый частичный якобиан в секторе с фиксированным k инвариантен относительно преобразований

$$\hat{Q} \rightarrow \hat{Q}_0 \hat{Q}, \quad \hat{T} \rightarrow \hat{T} \hat{T}_0. \quad (\text{Б.14})$$

где матрицы $\hat{Q}_0$ и $\hat{T}_0$ являются произвольными ортогональной и верхнетреугольной соответственно. Поэтому вычислим вариацию уравнения (Б.12) по $\hat{\phi}_k, \hat{\rho}_k$ и X_k , а после положим $\hat{Q}_{k-1} = \hat{1}, \hat{T}_{k-1} = \hat{1}$. Получим

$$\delta \hat{\sigma}_k = \frac{(1 + h\dot{\hat{\phi}}_k) \delta \hat{\rho}_k}{h} + \frac{\delta \hat{\phi}_k (1 + h\dot{\hat{\rho}}_k)}{h} + \frac{\hat{D}_{k-1} \delta \hat{X}_k \hat{D}_{k-1}^{-1}}{h}. \quad (\text{Б.15})$$

Выделим в вариации $\delta\hat{\sigma}_k$ диагональный $\delta\hat{\sigma}_k^{(d)}$, анти-симметричный $\delta\hat{\sigma}_k^{(r)}$ и верхне-треугольный (с нулями на диагонали) вклады $\delta\hat{\sigma}_k^{(t)}$, т.е. представим вариацию в виде $\delta\hat{\sigma}_k = \delta\hat{\sigma}_k^{(d)} + \delta\hat{\sigma}_k^{(r)} + \delta\hat{\sigma}_k^{(t)}$. Эти вклады являются линейно-независимыми, причём они зависят от вариаций новых переменных опять-таки верхне-треугольным образом:

$$\begin{aligned}\delta\hat{\sigma}_k^{(d)} &= \delta\hat{\sigma}_k^{(d)}(\delta\hat{\rho}_k), \\ \delta\hat{\sigma}_k^{(r)} &= \delta\hat{\sigma}_k^{(r)}(\delta\hat{\rho}_k, \delta\hat{\phi}_k), \\ \delta\hat{\sigma}_k^{(t)} &= \delta\hat{\sigma}_k^{(t)}(\delta\hat{\rho}_k, \delta\hat{\phi}_k, \delta\hat{X}_k).\end{aligned}\tag{Б.16}$$

При подсчёте множителя в якобиане перехода, соответствующего переменным $\phi_{k,ij}$, мы должны рассматривать нижне-треугольный сектор $i > j$, тогда как при подсчёте множителя, соответствующего переменным $X_{k,ij}$, мы должны рассматривать сектор $i < j$. Таким образом, якобиан перехода J_k в k -секторе равен

$$J_k = \left(1 + h \sum_{1 \leq j < i \leq d} \dot{\rho}_{k,j}\right) \prod_{1 \leq i < j \leq d} \exp(\rho_{k-1,i} - \rho_{k-1,j}).\tag{Б.17}$$

Отметим, что фигурирующая в (Б.17) сумма может быть переписана в виде

$$\sum_{1 \leq j < i \leq d} \rho_{k,j} = \sum_{1 \leq j \leq d} (d-j)\rho_{k,j} \stackrel{\sum_i \rho_i = 0}{=} \sum_{1 \leq j \leq d} \frac{\lambda_j}{d} \rho_{k,j},\tag{Б.18}$$

где ляпуновские экспоненты λ_i определены в (Б.8).

Теперь перейдём к вычислению меры функционального интегрирования (Б.5). Из (Б.12) следует в главном порядке по h выражение для самой матрицы $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma}_k = \dot{\hat{\rho}}_k + \dot{\hat{\phi}}_k + \hat{D}_{k-1} \dot{\hat{X}}_k \hat{D}_{k-1}^{-1},\tag{Б.19}$$

где мы также положили $\hat{Q}_{k-1} = \hat{1}$, $\hat{T}_{k-1} = \hat{1}$ после проведения всех вычислений. Поэтому выражение для S_σ (Б.5) есть

$$S_\sigma = \frac{1}{2d} \int_0^t \left(\sum_{1 \leq i \leq d} (\dot{\rho}_i(t))^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq d} \left(\frac{1}{2} (\dot{X}_{ij} e^{\rho_i - \rho_j})^2 + \frac{d}{2(d+1)} (2\dot{\phi}_{ij} + \dot{X}_{ij} e^{\rho_i - \rho_j})^2 \right) \right).\tag{Б.20}$$

Объединяя (Б.17, Б.20), получаем меру интегрирования [206, Ур. (17)]

$$\exp(-S_{\phi\rho X}) \mathcal{D}\phi \left(\prod_k \prod_{1 \leq i < j \leq d} dX_{k,ij} e^{\rho_{k-1,i} - \rho_{k-1,j}} \right) \mathcal{D}\rho, \quad (\text{Б.21})$$

$$S_{\phi\rho X} = \frac{1}{2d\lambda} \int_0^t dt \left(\sum_{1 \leq i \leq d} (\dot{\rho}_i(t) - \lambda_i)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq d} \left(\frac{1}{2} (\dot{X}_{ij} e^{\rho_i - \rho_j})^2 + \frac{d}{2(d+1)} (2\dot{\phi}_{ij} + \dot{X}_{ij} e^{\rho_i - \rho_j})^2 \right) \right).$$

В действие $S_{\phi\rho X}$ мы добавили константу (величину, не зависящую от переменных функционального интегрирования). Эта константа обеспечивает нормировку, так что функциональное интегрирование (без дополнительных пред-экспоненциальных множителей) даёт единицу. Равенство единице можно проверить последовательным интегрированием в анти-хронологическом порядке сначала по переменным $\hat{\phi}$, затем по переменным $\hat{X}$, и наконец, по переменным $\hat{\rho}$. Кроме того, мы не выписали явно множителя, обеспечивающего нормировку гауссовых интегрирований, который при желании может быть восстановлен прямолинейным образом.

Теперь рассмотрим частный случай размерности $d = 2$. Тогда у матрицы $\hat{X}$ есть единственный ненулевой элемент χ , а матрица $\hat{D}$ характеризуется единственным параметром ρ . Мера в функциональном интегрировании (Б.21) принимает вид [211]

$$\exp(-S_{\phi\rho X}) \mathcal{D}\phi \left(\prod_k d\chi_k \exp(2\rho_{k-1}) \right) \mathcal{D}\rho, \quad (\text{Б.22})$$

$$S_{\phi\rho X} = \frac{1}{2\lambda} \int_0^t dt \left((\dot{\rho} - \lambda)^2 + \frac{1}{4} (\dot{\chi} e^{2\rho})^2 + \frac{1}{6} (2\dot{\phi} + \dot{\chi} e^{2\rho})^2 \right).$$

Б.3 Течение с сильной сдвиговой компонентой

Рассмотрим уравнение Фоккера-Планка на совместную функцию распределения $\mathcal{P}_\ell(\varrho, \psi)$, см. (4.142, 4.148), описывающую статистику Лагранжевых траекторий ℓ в терминах ϱ, ψ , в пределе коротко-коррелированной по

времени случайно компоненты поля скорости ς :

$$\partial_t \mathcal{P}_\ell = -\frac{\Sigma \sin(2\psi)}{2}(\partial_\varrho - 1)\mathcal{P}_\ell + \hat{\mathcal{L}}\mathcal{P}_\ell, \quad (\text{Б.23})$$

которое применимо в пределе $D/\Sigma \ll 1$, где $\hat{\mathcal{L}} = \Sigma \sin \psi \partial_\psi \sin \psi + D \partial_\psi^2$. Уравнение Фоккера-Планка (Б.23) является следствием уравнений Ланжевена (4.144, 4.148).

Преобразование Фурье относительно переменной ϱ уравнения (Б.23) на значении ‘частоты’ $-i\eta$ имеет вид

$$\partial_t \tilde{\mathcal{P}}_\ell = \left(-\frac{\Sigma(\eta - 1)}{2} \sin(2\psi) + \hat{\mathcal{L}} \right) \tilde{\mathcal{P}}_\ell. \quad (\text{Б.24})$$

Поскольку мы интересуемся асимптотическим поведением $\mathcal{P}_\ell$ на больших временах, полезно рассмотреть задачу о спектре линейного оператора в правой части (Б.24). Для сопряжённой задачи оператор $\hat{\mathcal{L}}^T(\psi) = \hat{\mathcal{L}}(-\psi)$, что приводит к симметрии собственных значений γ : $\gamma(\eta) = \gamma(2 - \eta)$. При взятии обратного преобразования Фурье из этого следует симметрия функции энтропии S , о которой речь идет перед (4.150) в основном тексте. Поскольку $\hat{\mathcal{L}}$ вещественный в ψ -представлении, также имеем симметрию $\gamma(\eta^*) = (\gamma(\eta))^*$. Мы будем сортировать собственные значения в порядке уменьшения значения действительной части. Нулевое собственное значение $\gamma_0(\eta) = -\lambda q_{2\eta}$ является невырожденным, является вещественным при $\text{Im } \eta = 0$ и обладает наибольшей действительной частью в окрестности этой прямой. Согласно нашему численному анализу, оно может быть хорошо приближено разложением

$$q_{2\eta} \approx \frac{\tilde{\eta}(1 - Q_1 \tilde{\eta})}{2}, \quad Q_1 = 0.026, \quad \tilde{\eta} = 1 - (\eta - 1)^2, \quad (\text{Б.25})$$

в области $|\eta - 1| \leq 2.5$. Обратное преобразование Фурье $\exp(-q_{2\eta}\tau)$ приводит к функции Крамера (4.150). В пределе больших $|\eta| \gg 1$ имеем асимптотическое поведение $q_{2\eta} = -Q_2 |\eta|^{4/3}$, где $Q_2 \approx 0.32$.

В комплексной плоскости переменной η имеются точки ветвления, при которых два собственных значения станут равными. В частности, нулевое собственное значение сравнивается с первым в точках $\eta - 1 \approx \pm 2.1 \pm 1.6i$, а следующая пара с наибольшими действительными частями, $\gamma_1(\eta_*)$ и $\gamma_2(\eta_*)$, сравниваются в точках $\eta_* - 1 \approx \pm 5.0$. В окрестности каждой сингулярности, соответствующие собственные числа относятся к двум листам у корневой особенности. Важно, что при взятии обратного преобразования Фурье (Б.24) эти точки ветвления не вносят вклада в пределе больших $|\varrho|/\tau$. Действительно, предположим что ϱ

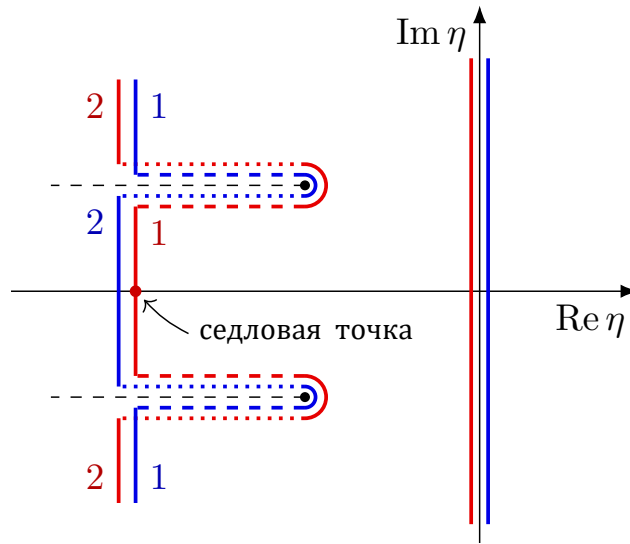


Рисунок Б.1 — Контуры интегрирования при обратном преобразовании Фурье функции Крамера для нулевого и первого собственных значений, исходные обозначены непрерывными синей и красной линиями. Чёрными прерывистыми линиями обозначены разрезy.

положительно, и деформируем оба контура интегрирования для слагаемых с этими собственными значениями как на Рисунке Б.1. Подынтегральные функции с предэкспонентами равны друг другу на штрихованных частях контуров, но интегрирования проходят в противоположных направлениях, так что результаты интеграла вдоль каждой штрихованной части контура сокращают друг друга. Точно так же происходит сокращений пунктирных частей контуров разного цвета. Дальше можно объединить части контуров ‘1’ и ‘2’ в два соединённых контура, где подынтегральные функции аналитически продолжены с вещественной оси. Таким образом заключаем, что если сдвигать контуры интегрирования совместно в комплексной плоскости, то можно пренебречь этими точками ветвления.

Следовательно, на больших временах результат обратного преобразования Фурье задается поведением нулевого собственного значения и собственной функции в окрестности перевальной точки, которая находится на вещественной оси, что обеспечивает положительность плотности вероятности $\mathcal{P}_\ell$. Перевальная точка является решением уравнения $\eta = -\partial_\xi S(\xi)$, где $\xi = \varrho/\tau$. Зная $q_{2\eta}$, можно восстановить функцию энтропии. Результат согласуется со статистикой, полученной в результате численной симуляции ланжевеновских уравнений (4.144, 4.148) в основном тексте. Отметим, что $S(\xi) \approx 3.2\xi^4$ на больших $|\xi| \gg 1$. Такое очень быстрое затухание функции распределения выполняется вплоть до $|\xi| \sim (D/\Sigma)^{-2/3}$, после

чего $S \sim (\varrho/Dt)^2$ что обеспечивается членом $\sim D\partial_\varrho^2\mathcal{P}_\ell$ которым пренебрегли в правой части (Б.23).

Значение экспоненты $q_{2\eta}$ (Б.25) можно найти аналитически при $\eta = 2$ [215]. Для этого рассмотрим динамику $\langle \ell^2(t) \rangle$, которую можно связать с остальными квадратичными средними. Для случая коротко коррелированного во времени процесса $\varsigma(t)$ из уравнения $d\ell/dt = (\hat{\Sigma} + \hat{\sigma})\ell$ мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \ell_x^2 \rangle &= 2\Sigma \langle \ell_x \ell_y \rangle, & \frac{d}{dt} \langle \ell_y^2 \rangle &= 2D \langle \ell_x^2 \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \ell^2 \rangle &= 2[\Sigma \langle \ell_x \ell_y \rangle + D \langle \ell_x^2 \rangle], & \frac{d}{dt} \langle \ell_x \ell_y \rangle &= \Sigma \langle \ell_y^2 \rangle.\end{aligned}$$

Динамическая система в пределе сильного сдвига эквивалентна рассмотренной в [215], полученной в случае изотропных коротко-коррелированных флуктуаций $\hat{\sigma}(t)$. Рассмотрение этой приводит к выражению экспоненты Ляпунова для динамики $\langle \ell^2 \rangle$ как корню характеристического уравнения:

$$\langle \ell^2(t) \rangle \propto \exp(-q_4\tau), \quad -(\lambda_c q_4)^3 = 4. \quad (\text{Б.26})$$

Вычисление $\langle \ell^2(t) \rangle$ с использованием приближённого выражения для функции Крамера S , приведённого в статье, даёт такой же результат с относительной точностью 3%.

Приложение В

Уравнения на корреляционные функции скаляра

Получим сперва уравнение на парную корреляционную функцию (4.70). Искомое уравнение должно быть получено из уравнения (4.32) на частично усреднённую корреляционную функцию $\mathcal{F}$ путём его усреднения по статистике (Б.4). Удерживая в правой части только сильно флуктуирующий член с $v_i(t) = \sigma_{ik}(t) r_k$, получаем

$$\begin{aligned} \partial_t F(t, r) &= \left\langle \partial_i v_i(t) \int^t dt' v_k(t') \partial_k \mathcal{F}(t', r) \right\rangle + \dots = \frac{1}{2} \partial_i S_{ik} \partial_k F + \dots = \\ &= \frac{(d-1)D}{2} ((r \partial_r)^2 + d r \partial_r) F + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Подстановка сюда (Б.9) с $d = 3$ приводит к (4.70).

Теперь получим уравнение на четверную корреляционную функцию. На этом пути нам придётся установить общие свойства $2n$ -точечных корреляционных функций

$$F_{2n}(t, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \left\langle \prod_{\mu=1}^{2n} \vartheta(t, \mathbf{R}_\mu) \right\rangle. \quad (\text{B.2})$$

Во-первых, из определения корреляционной функции следует, что она обладает симметрией по отношению к перестановке любых двух её пространственных аргументов:

$$F_{2n}(t, \dots, \mathbf{R}_\mu, \dots, \mathbf{R}_\nu, \dots) = F_{2n}(t, \dots, \mathbf{R}_\nu, \dots, \mathbf{R}_\mu, \dots). \quad (\text{B.3})$$

Во-вторых, мы предполагаем статистическую однородность в пространстве распределения скаляра. Это означает, что

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu i} F_{2n} = 0, \quad (\text{B.4})$$

где $\partial_{\mu i}$ — дифференцирование по i -й компоненте μ -й координаты.

Будем действовать аналогично (Б.1), но стартуем непосредственно с уравнения (4.1), из которого следует уравнение на корреляционную функцию

$$\partial_t F_{2n} = - \left\langle \left(\sum_{\mu} v_i(\mathbf{R}_\mu) \partial_{\mu i} \right) F_{2n} \right\rangle + \dots, \quad (\text{B.5})$$

где многоточием обозначены регулярные члены (например, диффузия или адвекция регулярной во времени частью потока). Теперь в качестве F_{2n} в правой части (B.5) подставим это же выражение (B.5), но проинтегрированное по времени. После усреднения по статистике скорости получим

$$\partial_t F_{2n} = \partial_{\mu i} \mathcal{K}_{ij}(\mathbf{r}_{\mu\nu}) \partial_{\nu j} F_{2n} + \dots = \partial_{\mu i} \mathcal{K}_{ij}^S(\mathbf{r}_{\mu\nu}) \partial_{\nu j} F_{2n} + \dots, \quad \mathbf{r}_{\mu\nu} = \mathbf{R}_\mu - \mathbf{R}_\nu, \quad (\text{B.6})$$

где симметричная часть корреляционной функции скорости $\mathcal{K}_{ij}^S = (\mathcal{K}_{ij}(\mathbf{r}) + \mathcal{K}_{ji}(\mathbf{r}))/2$, см. аналогичные обозначения (2.52) для одновременной корреляционной функции скорости. Последнее равенство в (B.6) верно благодаря симметрии корреляционной функции (B.3) относительно перестановки $\nu \leftrightarrow \mu$; таким образом, факт нарушения статистикой поля скорости зеркальной симметрии не влияет на статистику перемешивания скаляра. Мы также воспользовались несжимаемостью поля скорости, которое приводит к условию $\partial_{\mu i} \mathcal{K}_{ij}(\mathbf{r}_{\mu\nu}) = 0$ для корреляционной функции. Далее, выразим симметричную часть корреляционной функции $\mathcal{K}_{ij}^S(\mathbf{r}_{\mu\nu})$ через структурную функцию (B.3):

$$\begin{aligned} \partial_t F_{2n} &= -\frac{1}{2} \partial_{\mu i} \mathcal{S}_{ij}(\mathbf{r}_{\mu\nu}) \partial_{\nu j} F_{2n} + \sum_{\nu, \mu} \mathcal{K}_{ij}(0) \partial_{\mu i} \partial_{\nu j} F_{2n} + \dots = \\ &= -\frac{1}{2} \partial_{\mu i} \mathcal{S}_{ij}(\mathbf{r}_{\mu\nu}) \partial_{\nu j} F_{2n} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Воспользовавшись (B.4), мы получили, что для статистически однородной в пространстве задачи динамика корреляционных функций определяется только структурной функцией скорости. В (B.7) суммирование происходит в действительности по $\mu \neq \nu$, поскольку структурная функция в нуле равна нулю. В случае парной корреляционной функции подстановка структурной функции (B.6) для гладкого поля скорости приводит к (B.1).

В.1 Корреляционная функция четвёртого порядка

Теперь обратимся к четверной корреляционной функции, $n = 2$. Покажем, что линейный профиль скорости сохраняет во времени вид зависимости от двух разностей координат, см. три слагаемых в правой части (4.79). Пусть, например, $F_4 = F_4(t, \mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{43})$. Введём новые координаты $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{21}/\sqrt{2}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{43}/\sqrt{2}$, $\mathbf{r}_3 = (\mathbf{r}_{41} + \mathbf{r}_{32})/2$, $\mathbf{r}_4 = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4)/2$. Преобразование $\mathbf{r}_\nu = T_{\nu\mu} \mathbf{R}_\mu$ от

исходных векторов $\mathbf{R}_\mu$ к векторам $\mathbf{r}_\nu$ является ортогональным, $T_{\nu\mu}T_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}$, поэтому в (B.5) сумма

$$\sum_{\mu=1}^4 v_i(\mathbf{R}_\mu) \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{\mu i}} F_4 = \sum_{\mu=1}^4 \sigma_{ik} R_{\mu k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{\mu i}} F_4 = \sum_{\nu=1}^2 v_i(\mathbf{r}_\nu) \frac{\partial}{\partial r_{\nu i}} F_4. \quad (\text{B.8})$$

где последнее равенство имеет место только для выбранного нами вида зависимости F_4 . Подчеркнём, что равенство (B.8) имеет место только в случае линейного поля скорости (4.2). Таким образом, имеем вместо (B.5)

$$\partial_t F_4 = - \left\langle \left(v_i(\mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial r_{1i}} + v_i(\mathbf{r}_2) \frac{\partial}{\partial r_{2i}} \right) F_4 \right\rangle + \kappa (\Delta_{r1} + \Delta_{r2}) F_4. \quad (\text{B.9})$$

В этом месте отметим, что процесс вывода показывает, что только в случае линейной в пространстве зависимости скорости вид зависимости $F_4 = F_4(t, \mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{43})$ сохраняется во времени. Кроме того, по аналогии с (4.29), мы можем ввести частично усреднённую четверную корреляционную функцию $\mathcal{F}_4$, которая согласно уравнению (B.9) удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \mathcal{F}_4 = \left(- \sum_{\alpha=1,2} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha i}} r_{\alpha k} \sigma_{ik} + \kappa \Delta_{r_\alpha} \right) \mathcal{F}_4, \quad (\text{B.10})$$

сравни с (4.32). Далее, шаг, аналогичный (B.1), приводит к уравнению

$$\partial_t F_4 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta=1}^2 \partial_{\alpha i} \mathcal{S}_{ij}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) \partial_{\beta j} F_4 + \kappa (\Delta_{r1} + \Delta_{r2}) F_4, \quad (\text{B.11})$$

где выражение $\mathcal{S}_{ij}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta)$ есть обобщение (B.6),

$$\mathcal{S}_{ij}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) = D \left((d+1)(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta) \delta_{ij} - r_{\alpha i} r_{\beta j} - r_{\alpha j} r_{\beta i} \right). \quad (\text{B.12})$$

Обратим внимание на противоположный знак при первом слагаемом в правых частях (B.11) и (B.7), что является следствием перехода от координат $\mathbf{R}_\mu$ к координатам $\mathbf{r}_{1,2}$.

Если статистика как скорости, так и скаляра изотропны, то корреляционная функция F_4 зависит только от абсолютных значений векторов $a_1 = \ln(|\mathbf{r}_{21}|/l)$, $a_2 = \ln(|\mathbf{r}_{43}|/l)$ и от угла θ между ними.

В.2 Уравнение на корреляционную функцию четвёртого порядка в двумерном случае

Будем считать, что угол θ отсчитывается от $\mathbf{r}_1$ к $\mathbf{r}_2$ против часовой стрелки. Частные производные по координатам (мы отбрасываем производную по углу поворота φ биссектрисы между векторами, поскольку от него не зависит F_4 в случае изотропной статистики)

$$\partial_{1i} = n_{1i} \frac{\partial}{\partial r_1} - \frac{\tau_{1i}}{r_1} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \partial_{2i} = n_{2i} \frac{\partial}{\partial r_2} + \frac{\tau_{2i}}{r_2} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (\text{B.13})$$

Единичный вектор $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ повёрнут относительно единичного вектора $\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha / |\mathbf{r}_\alpha|$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Тогда скалярные произведения $(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) = \cos \theta$, $(\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) = -(\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) = \sin \theta$. Достаточно считать, что угол θ меняется в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$, причём корреляционная функция симметрична относительно замены $\pi - \theta \rightarrow \theta$. Подставим теперь (B.13) в (B.11) с $d = 2$ и получим

$$\begin{aligned} \partial_t F_4 = & \frac{\lambda \sin^2 \theta}{2} \left((r_1 \partial_1 - r_2 \partial_2)^2 + (2\partial_\theta - \text{ctg} \theta (r_1 \partial_1 + r_2 \partial_2))^2 \right) F_4 + \\ & + \kappa (\Delta_{r_1} + \Delta_{r_2}) F_4, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

где $\partial_\mu \equiv \partial / \partial r_\mu$, где ляпуновская экспонента $\lambda = D$ согласно (B.9).

В.2.1 Уравнение в переменных сингулярного разложения

Перейдём к новым переменным Υ (4.81), $y = \ln(r_1/r_2)$ и θ [207]. В этих переменных уравнение (B.14) переписывается в виде

$$\partial_t F_4 = 2\lambda \sin^2 \theta \left(\partial_\theta^2 + \partial_y^2 \right) F_4 + \kappa (\Delta_{r_1} + \Delta_{r_2}) F_4. \quad (\text{B.15})$$

Отметим отсутствие в (B.15) производной по Υ в слагаемом, содержащим множитель λ — это соответствует тому, что в двумерном несжимаемом течении площадь сохраняется.

В.2.2 Уравнение в переменных Ивасавы

В уравнении (B.14) перейдём к переменным ρ , χ , Υ , которые определяются согласно равенствам

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{e^{2\rho}}{\sqrt{1 + e^{4\rho}\chi^2}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{4\rho}\chi^2}}, \quad (\text{B.16})$$

Переменные ρ , χ тождественны с используемыми в параметризации Ивасавы (B.11). Равенства (B.16) описывают состояние двух векторов r_1 , r_2 , которые эволюционируют под действием потока согласно (4.10), а в начальный момент времени были базисными векторами с единичной длиной декартовой системы координат [211]. В переменных ρ , χ уравнение (B.15) на четверную корреляционную функцию приобретает вид

$$\partial_\tau F_4 = \lambda \left(\frac{1}{2} \partial_\rho^2 + \partial_\rho + 2e^{-4\rho} \partial_\chi^2 \right) F_4 + \kappa (\Delta_{r_1} + \Delta_{r_2}) F_4 \quad (\text{B.17})$$

В пределе нулевой диффузии корреляционная функция F_4 связана с функцией распределения $\mathcal{P}(t, \rho, \chi)$ параметров деформации площади ρ, χ . Получим эту связь. Из уравнения на частично усреднённую корреляционную функцию (4.80) и из закона сохранения полной вероятности следует, что сохраняются интегралы

$$\int F_4 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2, \quad \int \mathcal{P} d\rho d\chi d\Upsilon. \quad (\text{B.18})$$

Отсюда следует, что

$$F_4 \propto \frac{\partial(r_1, r_2, \theta)}{\partial(\rho, \chi, \Upsilon)} r_1 r_2 \mathcal{P} = e^{2\Upsilon} e^{2\rho} \mathcal{P}, \quad (\text{B.19})$$

то есть уравнение (B.17), как и должно быть, соответствует [211, Ур. (7)] на $\mathcal{P}(t, \rho, \chi)$. В свою очередь, [211, Ур. (7)] может быть получено как следствие вида меры усреднения (B.22) в функциональном интегрировании по ρ , χ .